Math. P
369 b

<36633746860011

<36633746860011

Bayer. Staatsbibliothek

Math. P. 369^b

R

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Mathematische und historische

Beyträge und Ergänzungen

zu

Johann Joseph Ignaz Hoffmanns

neuester Schrift:

der

Pythagorische Lehrsatz

mit zwey und dreyßig Beweisen.

Systematisch geordnet

von

Johann Wolfgang Müller
Professor der Mathematik am Gymnasium in Nürnberg.

Mit einer Kupfertafel.

Nürnberg
in der J. L. S. Lechnerischen Buchhandlung.
1819.

m

Systematische Zusammenstellung

der

wichtigen bisher bekannten

Beweise

des

Pythagoräischen Lehrsatzes

mit einer ausführlichen

Theorie der Zahlendreiecke

von

Johann Wolfgang Müller
Professor der Mathematik am Gymnasium in Nürnberg.

Mit einer Kupfertafel.

Nürnberg
in der J. L. S. Lechnerischen Buchhandlung.
1819.

59 D

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Einleitung.

Es giebt, wie bekannt, Lehrsätze der Geometrie, die auf mehr als eine Art bewiesen werden können. Zum Beispiel: den Satz, daß zwei Dreiecke congruent sind, wenn die drei Seiten des einen Dreiecks den drei Seiten des andern Dreiecks, einzeln genommen, gleich sind, hat Euklid im ersten Buch der Elemente, vermittelst des siebenten Satzes, indirect oder apagogisch bewiesen. Proklus aber hat in seinem Commentar des ersten Buchs dieser Elemente einen directen Beweis dieses Lehrsatzes mitgetheilt, dessen Erfindung er dem Philo zuschreibt, und dessen sich auch Kästner, Kiesewetter, Klügel, Schmidt, und andere neuere in ihren Lehrbüchern bedient haben. Schulz hat in seinen Anfangsgründen der reinen Mathesis, §. 79. wiederum einen andern Beweis dieses Satzes gegeben, und Wolf, so wie Vega haben einen noch leichtern und einfachern Beweis, als die eben angeführten, aufzustellen versucht. Das nemliche findet bei dem Satz statt: daß zwei Dreiecke congruent sind, wenn in ihnen eine Seite, und zwei Winkel, wovon der eine Winkel aber dieser Seite gegenüberliegt, gleich sind, so wie auch bei dem Satz: daß der Peripheriewinkel im Halbkreis ein rechter Winkel ist. Für keinen Satz der Geometrie aber sind so viele Beweise erfunden worden, als für

den, daß in jedem rechtwinklichen Dreieck das Quadrat der Hypotenuse der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich ist. Man schreibt die Erfindung dieses Satzes, und desjenigen Beweises, den Euklid im ersten Buch seiner Elemente gebraucht hat, dem Pythagoras zu, und nennt diesen Satz deswegen den pythagoräischen Lehrsatz. Wenn man aber die historischen Quellen genauer untersucht, aus denen diese Nachricht fließt, so wird es zweifelhaft, daß Pythagoras wirklich der Erfinder dieses Satzes ist. Man hat nemlich von diesem berühmten Philosophen nur ungewisse Nachrichten, und manche offenbar fabelhafte Sagen. Nach den Behauptungen des Diogenes Laertius, Porphyrius und Jamblichus, dreier griechischen Philosophen, die sein Leben beschrieben haben, aber erst im dritten und vierten Jahrhundert der christlichen Zeitrechnung lebten, wurde er um die 48ste Olympiade, ohngefähr 585 Jahre vor der christlichen Zeitrechnung, auf der Insel Samos gebohren, unternahm, um die Philosophie zu studiren, Reisen nach Jonien, wo er den Thales hörte, und nach Egypten, wo er von den Priestern zu Memphis und Diospolis Unterricht nahm. Vom Cambyses wurde er von da nach Babylon als Kriegsgefangener geführt, kam endlich in sein Vaterland zurück, wo er einige Zeit öffentlich lehrte, machte hierauf wieder eine gelehrte Reise durch ganz Griechenland, um in den Mysterien eingeweiht zu werden, und ließ sich endlich in dem untern Theil von Italien zu Croton nieder, wo er eine eigene philosophische Schule stiftete, und ihr vierzig Jahre mit dem größten Ansehen vorstund. Er starb daselbst um die 70ste Olympiade, oder 500 Jahre vor der christlichen Zeitrechnung, und lehrte also ohngefähr 150 Jahre vor Plato, 250 Jahre vor Euklid, und 320 Jahre vor Archimedes. Diogenes Laertius, und

vor ihm schon Plutarch, der gegen das Ende des ersten und im Anfang des zweiten Jahrhunderts der christlichen Zeitrechnung lebte, beziehet sich nun auf ein altes Epigramm, welches Plutarch so anführt:

Ἡνίκα Πυθαγόρης τὸ περικλεὲς εὕρετο γράμμα
Κεῖνο, ἐφ᾽ ᾧ λαμπρὴν ἤγετο βουθυσίην.

Diogenes Laertius aber auf folgende Art:

Ἡνίκα Πυθαγόρης τὸ περικλεὲς εὕρατο γράμμα
Κεῖν᾽ ἐφ᾽ ὅτῳ κλεινὴν ἤγαγε βουθυσίην.

Der Sinn von beiden ist:

Da Pythagoras jene berühmte Construction erfand, brachte er deswegen ein feierliches Opfer.

Dieses Epigramm aber läßt unbestimmt, was für eine Construction er erfand.

Cicero drückt sich, wahrscheinlich mit Bezug auf dieses Epigramm, über diese Erfindung des Pythagoras, in seiner Abhandlung de natura Deorum, im dritten Buch, Kap. 36 so aus:

Pythagoras, cum in geometria quiddam novi invenisset, Musis bovem immolasse dicitur.

Pythagoras soll, da er in der Geometrie etwas Neues erfunden hatte, den Musen einen Ochsen geopfert haben.

Vitruvius ist von denjenigen alten Schriftstellern, deren Werke bis auf unsere Zeiten gekommen sind, der erste, der diese Erfindung des Pythagoras beschreibt. Er sagt nemlich im zweiten Kapitel des neunten Buchs seiner Architectur:

Item Pythagoras normam sine artificis fabricationibus inventam ostendit, et quam magno labore fabri nor-

mam facientes vix ad verum perducere possunt. Id rationibus et methodis emendatum ex eius praeceptis explicatur. Namque si sumantur regulae tres, e quibus una sit pedes tres, altera pedes quatuor, tertia pedes quinque, haeque regulae inter se compositae tangant alia aliam suis cacuminibus extremis, schema habentes trigoni, deformabunt normam emendatam. Ad eas autem regularum singularum longitudines, si singula quadrata paribus lateribus describantur, quod erit pedum trium latus, areae habebit pedes novem, quod erit quatuor, sexdecim, quod quinque erit, viginti quinque. Ita quantum areae pedum numerum duo quadrata ex tribus pedibus longitudinis laterum et quatuor efficiunt, aeque tantum numerum reddit unum ex quinque descriptum. Id Pythagoras cum invenisset, non dubitans a Musis se in ea inventione monitum, maximas gratias agens, hostias dicitur iis immolavisse.

„Ingleichen erfand Pythagoras ein Winkelmaas, ohne „mechanische Kunstgriffe, welches die Verfertiger solcher „Instrumente mit vieler Anstrengung kaum auszuführen „im Stande sind. Dieses auf Verhältnisse und Schlüsse „gegründete, von ihm gelehrte Verfahren, besteht in fol„gendem. Wenn man drei Lineale, wovon das eine drei, „das andere vier, und das dritte fünf Fuß lang ist, mit „ihren Enden in Form eines Dreiecks zusammensetzt, „so bilden sie ein vollkommenes Winkelmaas. Beschreibt „man nun auf der Länge eines jeden dieser Lineale ein „Quadrat, so wird das, dessen Seite drei Fuß ist, neun „Quadratfuß, das, dessen Seite vier Fuß ist, sechzehn „Quadratfuße, und das, dessen Seite fünf Fuß ist, fünf „und zwanzig Quadratfuße haben. So viele Quadrat„fuße also die beiden Quadrate, von welchen die Seite

„des einen drei Fuß und des andern vier Fuß hat, be„tragen, eben so viele Quadratfuße enthält das einzige, „dessen Seite fünf Fuß hat. Da Pythagoras dieses „erfunden hatte, und überzeugt war, daß ihm von den „Musen Beistand geleistet worden, soll er ihnen mit der „größten Dankerstattung Opfer dargebracht haben."

Plutarch und Diogenes beziehen sich auf einen gewissen Apollodorus oder Apollodotus. Nemlich Plutarch sagt in dem Dialog, ὅτι οὐδὲ ζῆν ἔστιν ἡδέως κατ' Ἐπίκουρον, im eilften Abschnitt:

Καὶ Πυθαγόρας ἐπὶ τῷ διαγράμματι βοῦν ἔθυσεν, ὥς φησιν Ἀπολλόδοτος.

„Und Pythagoras opferte wegen der Construction einen „Ochsen, wie Apollodotus sagt."

Hierauf führt er das vorhin angegebene Epigramm an, so daß man glauben muß, Apollodotus sei der Verfasser desselben. Sodann fährt er fort:

Εἴτε περὶ τῆς ὑποτεινούσης, ὡς ἴσον δύναται ταῖς περιεχούσαις τὴν ὀρθήν, εἴτε πρόβλημα περὶ τοῦ χωρίου τῆς παραβολῆς.

„Entweder betrift dieses den Satz, daß das Quadrat „der Hypotenuse den Quadraten der Seiten, die den rech„ten Winkel bilden, gleich ist, oder die Aufgabe von dem „Raum der Parabel."

Unter dem Raum der Parabel kann nicht die Quadratur der Parabel verstanden werden, denn diese Erfindung eignet sich Archimedes in der Vorrede seiner Schrift über diesen Gegenstand bestimmt zu, sondern entweder der Satz, daß sich in der Parabel die Quadrate der senkrechten Ordinaten wie die dazu gehörigen Absciſſen verhalten, oder der

Satz: daß das Quadrat der senkrechten Ordinate dem Rechteck aus dem Parameter und der Abscisse gleich sei.

An einer andern Stelle hingegen, nemlich im achten Buch der συμποσιακων προβληματων im zweiten Gespräch, sagt Plutarch:

Ἔστι γὰρ ἐν τοῖς γεωμετρικωτάτοις θεωρήμασι μᾶλλον δὲ προβλήμασι, τὸ, δυεῖν εἰδῶν δοθέντων ἄλλο τρίτον παραβάλλειν, τῷ μὲν ἴσον, τῷ δὲ ὅμοιον. ἐφ᾽ ᾧ καὶ φασὶν ἐξευρεθέντι θῦσαι τὸν πυθαγόραν - πολὺ γὰρ ἀμέλει γλαφυρότερον τοῦτο καὶ μουσικώτερον ἐκείνου τοῦ θεωρήματος ὃ τὴν ὑποτείνουσαν ἀπέδειξε ταῖς περὶ τὴν ὀρθὴν ἴσον δυναμένην,

„Zu den vorzüglichsten geometrischen Lehrsätzen oder „vielmehr Aufgaben, gehört der Satz: wenn zwei geradlinige Figuren gegeben sind, eine dritte zu beschreiben, „die der einen gleich, der andern ähnlich ist. (Es ist dieser Satz der 25ste des sechsten Buchs der Elemente Euklids.) Man sagt auch, daß Pythagoras wegen der Erfindung desselben geopfert habe. Denn offenbar ist er „weit schöner und sinnreicher als jener Lehrsatz, daß das „Quadrat der Hypotenuse denen der Seiten um den rechten Winkel gleich sei.“

Diogenes Laertius berichtet im Leben des Pythagoras, und zwar im achten Buch desselben:

Φησὶ δὲ Ἀπολλόδωρος ὁ λογιστικὸς ἑκατόμβην θῦσαι αὐτὸν εὑρόντα, ὅτι τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα πλευρὰ ἴσον δύναται ταῖς περιεχούσαις.

„Es sagt aber Apollodorus, der Arithmetiker, Pythagoras habe eine Hekatombe zum Opfer gebracht, da er „gefunden hatte, daß das Quadrat der Hypotenuse eines

„rechtwinklichen Dreiecks den Quadraten der beiden an„dern Seiten gleich ist.“

Hierauf fährt er fort: Καὶ ἔστιν ἐπίγραμμα οὕτως ἔχον und führt hierauf das schon erwähnte Epigramm an.

In dem Leben des Thales aber, und zwar im ersten Buch sagt er:

Παρά τε Αἰγυπτίων γεωμετρεῖν μαθόντα, φησὶ Παμφίλη, πρῶτον καταγράψαι ἐπὶ ἡμικυκλίου τὸ τρίγωνον ὀρθογώνιον, καὶ θῦσαι βοῦν. οἱ δὲ Πυθαγόραν φασὶν, ὧν ἐστιν Ἀπολλόδωρος ὁ λογιστικός.

„Da Thales bei den Egyptern die Geometrie erlernt „hatte, erzählt Pamphila, hat er am ersten in dem Halb„kreis das rechtwinkliche Dreieck beschrieben, und einen „Ochsen geopfert. Einige aber sagen, Pythagoras, wie „Apollodorus der Arithmetiker.“

Wahrscheinlich ist der Sinn dieser letzten Stelle, daß Pythagoras geopfert, nicht aber, daß er den Satz: jeder Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel, erfunden habe, wiewohl dieser Satz auf die richtige Verfertigung eines Winkelmaases eben so gut angewendet werden kann, als das vom Vitruvius beschriebene Dreieck, dessen drei Seiten sich wie 3, 4 und 5 verhalten, und dessen einer Winkel also genau ein rechter ist.

Stellt man nun diese Autoritäten zusammen, (denn die folgenden spätern Schriftsteller haben in dieser Rücksicht nur den erwähnten nachgeschrieben,) so eignet die Erfindung des sogenannten pythagoräischen Lehrsatzes dem Pythagoras zu, 1) Vitruv, 2) Diogenes Laertius. Nun führt von diesen beiden, Vitruv gar keinen ältern Schriftsteller als Autorität an, und Diogenes beruft sich zwar auf den Apollodorus,

aber wenn man die Stelle des Plutarchs, der bekanntlich früher als Diogenes Laertius schrieb, und von diesem wahrscheinlich benützt wurde, mit der Stelle des Diogenes Laertius zusammenhält, und auch die zweite Stelle des Diogenes Laertius im Leben des Thales damit vergleicht, so ist es sehr ungewiß, ob Apollodorus wirklich die Erfindung des Pythagoras so bestimmt angegeben hat, oder ob er nur der Verfasser des Epigramms ist, welches blos behauptet: Pythagoras habe wegen der Erfindung eines gewissen wichtigen geometrischen Satzes ein feierliches Opfer gebracht, ohne aber, so wenig wie Cicero, anzugeben, welcher Satz es war.

Plutarch hingegen läßt unausgemacht, welcher von folgenden drei Sätzen von Pythagoras erfunden worden sei:

1) das Quadrat der Hypotenuse ist der Summe der beiden Katheten-Quadrate gleich,

2) in der Parabel ist das Quadrat der senkrechten Ordinate dem Rechteck aus Parameter und Abscisse gleich,

3) die Auflösung der Aufgabe: eine geradlinige Figur zu beschreiben, die einer gegebenen gleich und einer andern gegebenen ähnlich ist.

Also läßt sich hierüber nichts gewisses bestimmen. Auch haben die meisten Gelehrten diese Untersuchung für Nebensache gehalten, und mit Inbegriff des Cicero sich nur mit der Beantwortung der zwei Fragen beschäftigt, ob Pythagoras wirklich geopfert, und worinnen dieses Opfer bestanden habe. So fügt Cicero der Sage, daß Pythagoras den Musen einen Ochsen geopfert haben soll, die Bemerkung bei: aber ich glaube es nicht, weil er sogar dem Delischen Apoll kein Thier opfern wollte, um den Altar nicht mit Blut zu besprützen. Und Porphyrius schreibt im Leben des Pythagoras, nachdem er angeführt hat, daß er blos Mehl, Honigkuchen und Weih-

rauch zu opfern pflegte: εβουθύτησε δέ ποτὲ σταίτινον, ὥς φασὶ, βοῦν, οἱ ἀκριβέστεροι, ἐξευρὼν τοῦ ὀρθογωνίου τὴν ὑποτείνουσαν ἴσον δυναμένην ταῖς περιεχούσαις. „Er „opferte aber einst einen Ochsen, der, wie die Gelehrtern „behaupten, aus Waitzenmehl geformt war, da er gefunden „hatte, daß das Quadrat der Hypotenuse eines rechtwink„lichen Dreiecks denen der Katheten gleich ist.“

Es mag nun Pythagoras oder ein anderer der Erfinder des sogenannten pythagoräischen Lehrsatzes seyn, so ist wahrscheinlich, daß zur Erfindung desselben die Aufgabe, ein Quadrat zu beschreiben, welches das Doppelte eines gegebenen Quadrats ist, die Veranlassung gab. Denn die Auflösung und der Beweis dieser Aufgabe war leicht zu finden, und daraus gieng der Lehrsatz: in jedem gleichschenklichen rechtwinklichen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse den beiden Kathetenquadraten gleich, von selbst hervor. Da ferner die Quadrate der Zahlen 3 und 4 so viel betragen als das Quadrat der Zahl fünf, und ein Dreieck, aus drei geraden Linien, welche sich wie diese Zahlen verhalten, gestaltet, nach dem Augenmaas ein rechtwinkliches war, (denn der Beweis, daß es wirklich rechtwinklich ist, konnte erst nach Erfindung des pythagoräischen Lehrsatzes gegeben werden,) so mußte dieses zu der Vermuthung führen, daß auch bei manchen rechtwinklichen Dreiecken, die nicht gleichschenklich sind, das Quadrat der Hypotenuse der Summe der Kathetenquadrate gleich sei, und dadurch konnte man bestimmt werden, diesen Gegenstand genauer zu untersuchen. Man fand endlich, daß dieses bei allen rechtwinklichen Dreiecken statt hat: welches aber der Beweis war, wodurch man sich von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugte, ist unbekannt. Gewöhnlich hält man den Beweis, welchen Euklid im 47sten

Satz des ersten Buchs seiner Elemente aufgestellt hat, und den ich als die eilfte Art des Beweises in dieser Abhandlung vorgetragen habe, für den zuerst erfundenen Beweis, oder für den, welchen Pythagoras gegeben haben soll. Ein zweiter Beweis folgt sogleich aus dem Zusatz zu dem achten Satz des sechsten Buchs von Euklid's Elementen, in Verbindung mit dem siebzehnten Satz dieses sechsten Buchs. Man nennt ihn den Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes, vermittelst der Proportionen, und ich habe ihn als die sechzehnte Art des Beweises in dieser Abhandlung vorgetragen. Ob man nun gleich schon Erweiterungen dieses Satzes in Euklid's Elementen, und zwar im zwölften und dreizehnten Satz des zweiten Buchs, und im ein und dreißigsten Satz des sechsten Buchs, so wie auch, nach Clavius Angabe, in den mathematischen Sammlungen des Alexandriners Pappus findet, (welche Erweiterungen ich alle in dieser Abhandlung zusammengestellt habe,) so hatte man sich dennoch mit den zwei angegebenen Beweisen des eigentlichen pythagoräischen Lehrsatzes bis zu Anfang des siebzehnten Jahrhunderts begnügt. Blos gelehrte Streitsucht gab die Veranlassung zur Aufsuchung mehrerer Beweise dieses Lehrsatzes. Der Bamberger Jesuit Clavius nemlich, ein berühmter Mathematiker seines Zeitalters, der mehrere Schriften, unter andern eine lateinische Uibersetzung der 15 Bücher der Elemente Euklid's, nebst einem weitläufigen Commentar herausgab, fieng mit dem französischen Mathematiker Peletarius, (oder eigentlich Lepeletier) einen gelehrten Streit über den sechzehnten Satz des dritten Buchs der Elemente des Euklid's an. In diesem Satz behauptet Euklid, daß der von der Kreisperipherie und einer Tangente, am Berührungspunkt gebildete Winkel kleiner ist, als jeder gegebene geradlinige spitzige Winkel. Nun behauptete Peletarius, da jede gegebene Größe

noch getheilt werden, folglich nicht die kleinste seyn kann, und dieser Berührungswinkel dennoch kleiner ist, als jeder noch so kleine geradlinige spitzige Winkel, so hat er eigentlich gar keine Größe mehr, sondern ist Null. Nemlich jeder Theil des Schenkels eines geradlinigen Winkels, hat mit dem Schenkel selbst, als einer geraden Linie, einerlei Richtung, aber bei krummlinigen Schenkeln hat jeder Theil, so klein er auch angenommen werden mag, eine andere Richtung, und nur im Berührungspunkt hat der krummlinige Schenkel des Berührungswinkels, mit seinem andern geradlinigen Schenkel, nemlich der Tangente, ganz einerlei Richtung, oder dieser Winkel am Berührungspunkt ist schlechterdings Null, und dieses ist auch der Fall, wenn man auf dem verlängerten Durchmesser, der im Berührungspunkt mit dieser Tangente einen rechten Winkel macht, einen noch so weit entlegenen Punkt als Mittelpunkt annimmt, und aus ihm durch den vorigen Berührungspunkt einen Kreis beschreibt. Denn die Peripherie dieses größern Kreises fällt zwar zwischen die Peripherie des vorigen kleinern Kreises und der gedachten Tangente, der eigentliche Berührungswinkel wird aber dadurch nicht getheilt, weil die Peripherie dieses größern Kreises im Berührungspunkt eben die Richtung hat wie die Tangente, oder wie die Peripherie des kleinern Kreises an diesem Berührungspunkt. Clavius hingegen giebt zwar zu, daß jede gegebene Größe nicht die kleinste, oder unendlich klein seyn kann, weil sie wiederum theilbar ist, aber, damit er den Einwurf begegnet, daß wenn der Berührungswinkel nicht Null ist, folglich eine angebliche Größe hat, so klein sie auch seyn mag, sich nach dem ersten Satz des zehnten Buchs Euklid's ein geradliniger spitziger Winkel müßte finden lassen, der kleiner als der Berührungswinkel ist, welches der Behauptung Euklid's im 16. Satz des dritten Buchs, deren

Richtigkeit Clavius zugesteht, widerspricht: so sagt Clavius, der erste Satz des zehnten Buchs Euklid's gelte nur von gleichartigen Größen, der Berührungswinkel sei aber mit einem geradlinigen nicht gleichartig, also lasse sich dieser Satz des Euklid's hier nicht anwenden. Allein Clavius hat nicht bedacht, daß wenn Berührungswinkel und geradlinige Winkel als ungleichartige Größen betrachtet werden, man alsdann auch gar nicht zu bestimmen im Stande ist, ob einer kleiner als der andere sei, weil in dieser Rücksicht die beiden Winkel in Beziehung auf die Größe müßen verglichen werden können, und daß es also keinen andern gültigen Ausweg giebt, als den, daß der Berührungswinkel blos in dem Berührungspunkt statt findet, wo er völlig Null ist. Uebrigens wurde dieser Streit auf beiden Seiten mit vieler Bitterkeit geführt, und da bei einer andern Gelegenheit Peletarius behauptet hatte, man könne für den pythagoräischen Lehrsatz keinen andern Beweis, als den, welchen Euklid vorträgt, und den aus den Proportionen hergeleiteten, erfinden, so wurde Clavius dadurch angespornt, auf neue Beweise dieses Lehrsatzes zu denken, um dem Peletarius seinen Irrthum öffentlich vorrücken zu können, wie er es in dem Commentar über den Euklid auch thut, und wo er gleichfalls den ganzen Streit, den er mit Peletarius über den Berührungswinkel führte, einrückte. Nun war es eigentlich für Clavius nicht schwer, einen neuen Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes zu finden, denn er kannte schon einen Satz des Pappus, (den nemlich, welchen ich in der Anmerkung zur siebenten Erweiterung des pythagoräischen Lehrsatzes mitgetheilt habe,) der vermuthlich dem Peletarius unbekannt war, und der zwar von weiterm Umfang ist als der pythagoräische Lehrsatz, dessen Construction aber nebst Beweis sich leicht auf die für den pythagoräischen Lehrsatz passende Construction und

Beweis zurückführen läßt. Diese reducirte Construction veränderte er auch auf zwei verschiedene Arten, und so erfand er die drei Beweise, die ich als die fünfte, sechste und siebente Art des Beweises in dieser Abhandlung vortrage.

Nach ihm haben Franz van Schooten, D. Andreas van Oudtshoorn, Sturm, Stöber und einige Ungenannte mehrere Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes gegeben, so daß sich die Anzahl aller, die ich habe auffinden können, auf siebzehn beläuft. Dabei habe ich eine Dissertation sorgfältig benützt, welche folgende Aufschrift hat:

Dissertatio mathematica de theoremate pythagorico, quam praeside Joanne Georgio Scherzio math. prof. publ. ord. in alma Argentoratensium universitate solemni eruditorum examini submittit, ad. d. 27. Aprilis A. 1743. Ernestus Henricus Stoeber, Argent.

Ferner habe ich sieben Erweiterungen dieses Lehrsatzes zusammengestellt. Endlich habe ich die brauchbarsten und vollständigsten Methoden angegeben, die sogenannten pythagoräischen Zahlendreiecke darzustellen, und zwar besonders für jede gegebene ganze Zahl alle andern möglichen ganzen Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß das Quadrat der gegebenen ganzen Zahl nebst dem Quadrat der kleinern gefundenen ganzen Zahl, dem Quadrat der größern gefundenen ganzen Zahl gleich ist.

Zum Schluß dieser Einleitung will ich die Art angeben, wie die Aufgabe, ein Quadrat y^2 zu construiren, das der Summe der zwei gegebenen Quadrate a^2 und b^2 gleich ist, unabhängig von dem pythagoräischen Lehrsatz aufgelöst werden kann. Es sey nemlich ein Rechteck, dessen anliegende beiden Seiten a und x sind, dem Quadrat der Linie b gleich, d. h. es sei $ax = b^2$, so ist $a^2 + ax = y^2$,

(nach der Bedingung der Aufgabe,) da aber $ax = b^2$ ist, so verhält sich $a : b = b : x$ folglich ist $\frac{b^2}{a} = x$, und da $(a + x)a = y^2$ ist, so verhält sich $a : y = y : a + x$. Wenn man also zu a und b die dritte Proportionale x sucht, und zwischen a und $a + x$ die mittlere Proportionale y nimmt, so ist diese die Seite des gesuchten Quadrats. Diese mittlere Proportionale y kann man nun auf folgende eigene Art finden. Es sey (Fig. 1.) $BC = a$, $CA = BD = a + x$, man beschreibe auf AD das gleichschenkliche Dreieck AED, dessen Schenkel AE und DE der Linie AC gleich, das heißt $= a + x$ sind, und ziehe BE und CE. Ich behaupte CE oder BE sey $= y$. Denn da $AB = CD$, $AE = DE$ und folglich $DAE = ADE$ ist, so ist das Dreieck ABE mit dem Dreieck CDE congruent, also $CE = BE$, daher das Dreieck BEC gleichschenklich, da aber das Dreieck AEC auch gleichschenklich, (weil $AE = AC$,) und der Winkel ACE gemeinschäftlich ist, so ist das Dreieck BEC dem Dreieck AEC ähnlich, folglich $BC : CE = CE : CA$, oder $a : CE = CE : a + x$, daher $CE^q = a(a + x)$. Da aber auch $y^2 = a(a + x)$ ist, so ist $CE^q = y^2$ und folglich $CE = y$. Beschreibt man also auf CE ein Quadrat, so ist es dem Quadrat der Linie BC nebst dem Rechteck aus BC und AB gleich, nemlich $y^2 = a^2 + ax = a^2 + b^2$, weil $x = \frac{b^2}{a}$ ist.

Diese Verfahrungsart hat Aehnlichkeit mit der Auflösung der Aufgabe einen Würfel y^3 zu construiren, welcher der Summe zweier gegebenen Würfel a^3 und b^3 gleich ist. Es ist dieser Satz das erweiterte und in seiner Allgemeinheit dargestellte sogenannte delische Problem, welches heißt: einen Würfel zu construiren, welcher das Doppelte eines gegebenen Würfels ist.

Wenn nun also $y^3 = a^3 + b^3$ seyn soll, so suche man 1) zu a und b die dritte Proportionale t, 2) zu a, b und t die vierte Proportionale u, 3) zwischen $\frac{1}{2}(a+u)$ und a die mittlere Proportionale x, und endlich 4) zwischen x und 2a zwei mittlere Proportionalen y und z, so ist y die Seite des gesuchten Würfels, der $= a^3 + b^3$ ist.

Denn da $a : b = b : t$, so ist $\frac{b^2}{a} = t$,

ferner da $a : b = t : u$, oder $a : b = \frac{b^2}{a} : u$, so ist $\frac{b^3}{a^2} = u$, und da $\frac{1}{2}(a+u) : x = x : a$, so ist $x^2 = \frac{1}{2}a(a+u)$

$= \frac{1}{2}a\left(a + \frac{b^3}{a^2}\right)$.

Endlich da $x : y = y : z = z : 2a$, so ist $\frac{y^2}{x} = z$ und $\frac{z^2}{y} = 2a$, folglich $\frac{y^4}{x^2 y} = 2a$, oder $\frac{y^3}{x^2} = 2a$, also $y^3 = 2a\,x^2$, oder $y^3 = 2a\left[\frac{1}{2}a\left(a + \frac{b^3}{a^2}\right)\right]$, d. i. $y^3 = a^2\left(a + \frac{b^3}{a^2}\right)$

$= a^3 + b^3$.

Der Grund dieses Verfahrens ist dieser. Es sey ein rechtwinkliches Parallelepipedum gegeben, dessen Länge $= L$, die Breite $= B$ und die Höhe $= H$ sey, und es soll ein Würfel construirt werden, der diesem Parallelepipedum gleich ist, nemlich daß $y^3 = LBH$ ist. Man mache $\frac{1}{2}L : x = x : B$, und $x : y = y : z = z : 2H$, so ist y die Seite des gesuchten Würfels. Denn es ist $x^2 = \frac{1}{2}BL$, $z = \frac{y^2}{x}$, $2H = \frac{z^2}{y}$ also $2H = \frac{y^4}{x^2 y} = \frac{y^3}{x^2}$, d. i. $2H\,x^2 = y^3$, oder $2H.\frac{1}{2}BL = y^3$, d. i. $LBH = y^3$.

Stellt man sich nun ein rechtwinkliches Parallelepipedum vor, dessen Länge $= L$, die Breite aber $= a$ und die Höhe auch $= a$ ist, und welches dem Würfel b^3 gleich ist, nemlich $La^2 = b^3$, so ist $L = \frac{b^3}{a^2}$, und wenn das Parallelepi-

pedum $L a^2$ gehörig mit der Seite a an den Cubus a^3 gestellt wird, so giebt es mit ihm verbunden ein größeres rechtwinkliches Parallelepipedum $a^3 + L a^2$, dessen Länge $= L + a$, die Breite $= a$ und die Höhe auch $= a$ ist. Wird nun ein Würfel y^3 construirt, der diesem Parallelepipedum $(L + a)\, a a$ gleich ist, so ist er auch $= a^3 + b^3$. Man mache also $\frac{1}{2}(a + L) : x = x : a$, aber da $L = \frac{b^3}{a^2}$ ist, so muß man vorher machen $a : b = b : t$ und $a : b = t : u$, so ist $u = \frac{b^3}{a^2} = L$. Endlich mache man $x : y = y : z = z : 2a$. Dann wird y oder die erste der beiden mittlern Proportionalen die Seite des gesuchten Würfels seyn, der $= a^3 + b^3$ ist.

Der besondere Fall $y^3 = 2a^3$, oder die Auflösung der eigentlichen Delischen Aufgabe von der Verdopplung des gegebenen Würfels a^3 ist in der allgemeinen Auflösung enthalten. Denn hier ist $b^3 = a^3$, also $b = a$, folglich auch $t = a$ und $u = a$, ferner $\frac{1}{2}(a + u) = \frac{1}{2}(a + a) = a$.

Da nun $\frac{1}{2}(a + u) : x = x : a$ sich verhält, und daher $x^2 = \frac{1}{2} a (a + u)$ ist, so ist hier $x^2 = a^2$ und $x = a$. Daher endlich $a : y = y : z = z : 2a$, welches die bekannte Auflösung ist, die vermittelst zweier Kegelschnittslinien construirt wird.

Soll $y^3 = m a^3$, oder der gesuchte Würfel ein beliebiges Vielfaches oder auch ein beliebiger aliquoter Theil des gegebenen Würfels a^3 seyn, so ist nun die Auflösung leicht. Man suche nemlich zwischen a und ma zwei mittlere geometrische Proportionallinien y und z, so daß $a : y = y : z = z : ma$ sich verhält, so ist die erste y die gesuchte Seite des Würfels y^3 der $= m a^3$ ist. Denn $\frac{y^2}{a} = z$ und $\frac{z^2}{y} = ma$, also $\frac{y^4}{a^2 y} = ma$, oder $\frac{y^3}{a^2} = ma$, und folglich $y^3 = m a^3$.

I.

I.

Beweise für einen partikulären Fall des pythagoräischen Lehrsatzes, welcher ein rechtwinkliches gleichschenkliches Dreieck voraussetzt.

Erste Art des Beweises dieses Falls.

Lehrsatz. (Fig. 2.)

In jedem rechtwinklichen und gleichschenklichen Dreieck BAC ist das Quadrat der Hypotenuse BC das Doppelte des Quadrats einer Kathete AB.

Beweis.

Man beschreibe auf den beiden gleichen Katheten AB und AC die Quadräte ABFE und ADHC, und ziehe die Diagonalen BE, CD, und die gerade Linie DE. Da AB = AD, AC = AC und die Winkel bei A rechte Winkel sind, so ist das Dreieck BAC mit dem Dreieck CAD congruent, also ist CD = BC, eben so läßt sich zeigen, daß BE = BC und DE = DC ist. Ferner ist der Winkel ABC im gleichschenklichen rechtwinklichen Dreieck CAB, ein halber rechter Winkel, auch ist der Winkel ABE im rechtwinklichen und gleichschenklichen Dreieck FAB die Hälfte eines rechten Winkels, also ist CBE ein rechter Winkel.

B

In Rücksicht der drei andern Winkel des Vierecks BCDE kann man das nemliche zeigen. Also ist dieses Viereck rechtwinklich und gleichseitig, folglich das Quadrat der Hypotenuse BC. Nun ist das Quadrat ABFE dem Dreieck BED gleich, und das Quadrat ACHD ist dem Dreieck BCD gleich, aber diese beiden Dreiecke BED und BCD machen das Quadrat BCDE der Hypotenuse BC aus, also sind die beiden Quadrate der gleichen Katheten AB und AC zusammen dem Quadrat der Hypotenuse gleich, oder das Quadrat der Hypotenuse ist das Doppelte des Quadrats einer der gleichen Katheten.

Anmerkung.

Dieser Beweis ist von Franz van Schooten, und findet sich im ersten Buch seiner exercitationum mathematicarum. Lugd. Batav. 1657.

Zweite Art des Beweises dieses Falls.

Lehnsatz. (Fig. 3.)

Wenn eine Seite AB eines Quadrats ABDC verlängert, und auf der Verlängerung die Linie BF der Seite AB gleich gemacht worden ist, und es wird auf AF ein Quadrat AFEH beschrieben, so ist dieses Quadrat das Vierfache des Quadrats ABDC.

Beweis.

Man verlängere CD bis G, und BD bis I, so ist BI mit AH und EF parallel, und CG mit AF und HE parallel, folglich sind die vier Vierecke des Quadrats AFEH vier Rechtecke.

Da das Viereck DBFG ein Rechteck ist, so ist DG = BF und GF = DB. Da nun BF = AB = DB ist, so ist BF = GF, und DG = DB, das heißt: das Rechteck DBFG ist gleichseitig, also ein Quadrat, welches dem Quadrat ABDC gleich ist, weil BF = AB.

Im Rechteck DGEI ist IE = DG und DI = EG. Weil aber EF = AF und FG = AB ist, so ist EF — FG oder EG = AF — AB oder = BF, nemlich EG = DG, folglich dieses Rechteck gleichseitig, also ein Quadrat, welches dem Quadrat ABDC gleich ist, weil EG = BF = AB.

In dem Rechteck CHID ist CH = ID und HI = CD, da aber AH = AF und AC = AB = BF ist, so ist AH — AC oder CH = AF — BF oder = AB, aber CD ist auch = AB, also ist CH = CD, folglich dieses Rechteck gleichseitig, und daher ein Quadrat, welches dem Quadrat ABDC gleich ist.

Also besteht das Quadrat AFEH aus vier Quadraten, von denen jedes dem Quadrat ABDC gleich ist, folglich ist das Quadrat AFEH das Vierfache des Quadrats ABDC.

Lehrsatz. (Fig. 3. Nr. 2.)

In jedem rechtwinklichen und gleichschenklichen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse das Doppelte des Quadrats einer Kathete.

Beweis.

Das rechtwinkliche und gleichschenkliche Dreieck sey CAB, in diesem sey bei A der rechte Winkel, BC die Hypotenuse, und die Kathete AB = der Kathete AC, so ist zu beweisen, daß das Quadrat der BC das Doppelte des Quadrats der AB ist.

Man verlängere AB, und mache BF = AB, beschreibe auf AF das Quadrat AFEH und auf BC ein gleichschenkliches Dreieck CDB, dessen Schenkel = AB sind, so ist das Viereck ABDC ein Quadrat. Man verlängere CD bis G, BD bis I, und ziehe CI, IG und GB. Diese drei Linien nebst BC sind die Diagonalen der vier Quadrate, aus welchen das Quadrat AFEH besteht, und welche einander gleich sind, (voriger Lehnsatz,) folglich sind diese Diagonalen auch gleich, also ist CIGB ein gleichseitiges Viereck. Nun sind HCD und ACD rechte Winkel, und ICD die Hälfte von HCD, so wie DCB die Hälfte von ACD, also ist jeder die Hälfte eines rechten Winkels, folglich ihre Summe, oder der Winkel BCI ein rechter Winkel, daher das gleichseitige Viereck CIGB ein Quadrat. Nun wird das Quadrat AFEH durch die Diagonalen CI, IG, GB und BC in acht congruente Dreiecke zerlegt, das Quadrat CIGB enthält aber vier solche Dreiecke, also ist das Quadrat CIGB die Hälfte des Quadrats AFEH. Das Quadrat AFEH ist aber das Vierfache des Quadrats der Kathete AB, (voriger Lehnsatz,) also ist das Quadrat CIGB oder das Quadrat der Hypotenuse BC das Doppelte des Quadrats der Kathete AB.

Anmerkung.

Diesen Beweis findet man in Plato's Werken, und zwar in dem Dialog Menon, heuristisch vorgetragen. Vitruvius führt in seiner Architektur, im ersten Kapitel des neunten Buchs, diese Construction auch an.

II.

Beweise des eigentlichen pythagoräischen Lehrsatzes, bei welchem überhaupt ein rechtwinkliches Dreieck, dessen beide Katheten in beliebigen Verhältnissen stehen können, vorausgesetzt wird.

Erste Art des Beweises.

Lehnsatz. (Fig. 4.)

Wenn eine gerade Linie AB in einem beliebigen Punkt C getheilt wird, so ist das Quadrat ADEB der ganzen Linie AB, den Quadraten der beiden Theile AC und BC, nebst dem doppelten Rechteck, dessen eine Seite dem einen Theil AC und die anliegende Seite dem andern Theil BC gleich ist, zusammen gleich. (Euklid's Elemente, 2. B. 4. Satz.)

Beweis.

Man ziehe die Diagonale BD, ziehe ferner durch C die CF parallel mit AD, und durch den Durchschnittspunkt G die HK mit AB parallel.

Da CF und AD parallel sind, so ist der äussere Winkel x dem gegenüberstehenden innern Winkel y gleich, nun

ist AD = AB, also sind in dem gleichschenklichen Dreieck BAD die Winkel an der Grundlinie BD nemlich w und y gleich. Folglich ist x = w, daher das Dreieck BCG gleichschenklich, oder BC = CG. Nun sind in dem Viereck CBKG die gegenüberstehenden Seiten parallel, folglich auch gleich, da nun auch BC = CG ist, so ist CBKG ein gleichseitiges Viereck. Es ist aber ABE ein rechter Winkel, also CBKG ein gleichseitiges Rechteck, oder ein Quadrat, und zwar das Quadrat des einen Theils BC der Linie AB.

Da HK mit AB parallel ist, so ist der äussere Winkel HGD dem gegenüberstehenden innern Winkel w gleich, nun ist aber, nach dem Erwiesenen, y = w, folglich auch y = HGD, also HD = HG. Da nun das Viereck HGFD ein Parallelogramm, folglich HD = GF und HG = DF, und nach dem eben Erwiesenen HD = HG ist, so ist es gleichseitig, und da ADE ein rechter Winkel ist, auch rechtwinklich, folglich ein Quadrat. Nun ist, weil HG mit AC und CF mit AD parallel ist, die Seite HG = AC. Also ist HGFD das Quadrat des zweiten Theils AC der Linie AB.

Nun ist HK mit AB, und CG mit AH parallel, und der Winkel A ist ein rechter Winkel, also ist das Viereck ACGH ein Rechteck, dessen eine Seite AC und die anliegende CG ist. Es ist aber CG = CB, folglich ist ACGH ein Rechteck, dessen eine Seite der eine Theil AC der Linie AB, und die anliegende Seite dem andern Theil CB der Linie AB gleich ist.

Ferner, da CF mit BE und HK mit DE parallel, und der Winkel E ein rechter Winkel ist, so ist auch das Viereck KEFG ein Rechteck, folglich EK = FG. Nun ist FG = HG, (im Quadrat DFGH) und HG = AC,

also EK = AC. Ferner ist GK = CB, daher ist KEFG ein Rechteck, dessen eine Seite EK dem einen Theil AC der Linie AB, und die anliegende Seite GK dem andern Theil CB der Linie AB gleich ist. Folglich sind die beiden Rechtecke ACGH und KEFG congruent, und betragen zusammen so viel als das Doppelte eines Rechtecks, dessen eine Seite AC und die anliegende Seite BC ist.

Nun besteht das Quadrat der Linie AB aus den vier Vierecken, wovon, nach dem Erwiesenen, zwei die Quadrate der Theile AC und CB, und die andern beiden an der Diagonale BD liegenden, dem doppelten Rechteck aus den Theilen AC und CB gleich sind; also ist das Quadrat der Linie AB denselben zusammen gleich.

Lehrsatz. (Fig. 5.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck CAH ist das Quadrat der Hypotenuse der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Beweis.

Man verlängere die eine Kathete AC nach B, und mache CB der andern Kathete AH gleich, beschreibe auf AB das Quadrat ABED, mache DM und EN = AH, so ist BN = DH = ME = AC und EN = DM = CB = AH. Ferner ziehe man HM, MN und NC. Nun sind die vier Dreiecke CAH, HDM, MEN und NBC congruent, folglich CH, HM, MN und NC gleich, also CHMN ein gleichseitiges Viereck. Ferner sind im ersten Dreieck CAH die beiden Winkel AHC und ACH zusammen einem rechten gleich, und im andern Dreieck NBC ist der Winkel BCN dem Winkel AHC des ersten Dreiecks gleich, also betragen ACH und BCN zusammen einen rechten Winkel.

Aber ACH, HCN und BCN machen zusammen zwei rechte Winkel, also ist das gleichseitige Viereck CHMN rechtwinklich, folglich ein Quadrat, und zwar das Quadrat der Hypotenuse CH.

Nun besteht das Quadrat ABED aus dem Quadrat CHMN und den vier congruenten Dreiecken. Zwei solche Dreiecke sind aber zusammen einem Rechteck gleich, dessen eine Seite die AC und die anliegende die AH ist, also sind die vier genannten Dreiecke dem Doppelten dieses Rechtecks gleich. Es ist aber BC = AH, und die Linie AB besteht aus den zwei Theilen AC und BC, also sind diese vier Dreiecke dem Doppelten eines Rechtecks gleich, dessen eine Seite AC der eine Theil der AB, und die andere anliegende Seite AH dem andern Theil BC der Linie AB gleich ist. Daher besteht das Quadrat ABED aus dem Quadrat CHMN und dem Doppelten eines Rechtecks, dessen eine Seite AC und die anliegende Seite dem Theil BC gleich ist.

Dieses nemliche Quadrat ABED der in zwei Theile AC und CB getheilten geraden Linie AB besteht aber auch aus dem Quadrat des Theils AC, aus dem Quadrat des Theils CB und aus dem Doppelten eines Rechtecks, dessen eine Seite der Theil AC und dessen anliegende Seite dem Theil BC gleich ist. (Voriger Lehnsatz.) Also ist das Quadrat CHMN den Quadraten der Theile AC und BC gleich. Es ist aber AC die eine Kathete des gegebenen rechtwinklichen Dreiecks CAH, und BC der andern Kathete AH gleich, also ist das Quadrat CHMN der Hypotenuse CH, der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Anmerkung.

Die vorgetragene zweite Art des Beweises für den particulären Fall, und der eben gegebene Beweis haben so viele Ähnlichkeit, daß einer aus dem andern hergeleitet werden

kann. Da der eben gegebene Beweis sich auf jedes rechtwinkliche Dreieck bezieht, aber die zweite Art des Beweises für den particulären Fall sich auf die gleichschenklichen rechtwinklichen Dreiecke beschränkt, so ist eigentlich der letztere Beweis in dem erstern enthalten. Man darf auch nur in der 5ten Figur AH = AC annehmen, so ist nach der vorgeschriebenen Konstruction CB = AH, folglich CB = AC, und daher EN = BN, DM = EM, und AH = HD, also liegen die Punkte C, N, M und H in der Mitte der Seiten des Quadrats der Linie AB, folglich stimmt die Lage des Quadrats HCNM mit der Lage des Quadrats CIGB in der 3ten Figur Nr. 2. überein.

Umgekehrt läßt sich aber auch durch eine zweckmäßige Veränderung der Konstruction in der 3ten Figur Nr. 2. die der 5ten Figur darstellen. Denn man darf nur AB größer als BF annehmen, sodann auf AF ein Quadrat beschreiben, und AC = AB nehmen, hierauf CG mit AF und BI mit AH parallel ziehen, so entspricht die Lage der IB und CG derjenigen Lage, welche die Linien CF und HK in der 4ten Figur haben. Nun ist es leicht, den vorgetragenen Lehnsatz, der aus dem zweiten Buch der Elemente des Euklid's genommen ist, selbst zu erfinden. Betrachtet man hierauf zugleich das eingeschriebene Quadrat BCIG, und vergleicht solches mit den zwei Quadraten CBKG und HDFG der 4ten Figur, so übersieht man leicht, daß diese zusammen dem Quadrat BCIG gleich sind.

Es ist also sonderbar, daß dieser so einfache Beweis sich weder dem Pythagoras noch dem Euklid dargebotten hat, da ohnedem Euklid den Satz aufstellte und bewies, (2. B. 4. Satz.) aus welchem durch eine leichte Folgerung der pythagoräische Lehrsatz bewiesen werden kann. Indessen läßt sich dieses doch daraus in etwas erklären, wenn man annimmt, daß Pythagoras bei dem Aufsuchen des Beweises, die Quadrate auf den drei Seiten des rechtwinklichen Dreiecks beschrieb, um durch anschauliche Vergleichung der beiden Qua-

drate der Katheten mit dem Quadrat der Hypotenuse den Beweis zu finden, da hingegen bei der Konstruction in der 5ten Figur erst gezeigt werden muß, daß die auf der Hypotenuse beschriebene vierseitige Figur ein Quadrat ist, und daß Euklid diesen Beweis beibehalten wollte, weil er schon bekannt und in den damaligen Lehrbüchern eingeführt war.

Uebrigens findet sich diese eben vorgetragene Beweisart des pythagoräischen Lehrsatzes zuerst in Winkler's instit. math. phys. geom. §. 363.; ferner in der von Mayer und Langsdorf besorgten Ausgabe von Wolf's Auszug aus den mathematischen Anfangsgründen, Seite 175. Auch hat ihn Klügel in einer englischen Geometrie von Henry Boad, die im Jahr 1735 erschienen ist, gefunden. Nur ist zu bemerken, daß in den drei angeführten Büchern, theils die Konstruction, theils die Art der Demonstration in etwas verschieden ist. Nemlich Winkler's Konstruction, die auch Stöber in seine Dissertation aufgenommen hat, entsteht, wenn man in der 5ten Figur das rechtwinkliche Dreieck BLC als das gegebene annimmt, und das Schema der 4ten Figur so an die Kathete BL legt, daß der Punkt D auf B, und DH in BL fällt, so daß die Seite DE des Quadrats DEBA der 4ten Figur als Verlängerung der Seite AB in der 5ten Figur betrachtet werden kann. Die Konstruction des Henry Boad, die sich gleichfalls in Stöber's Dissertation befindet, und die Stöber als seine eigene Erfindung vorträgt, besteht darinnen, daß das Quadrat ABED der 4ten Figur, so auf das Quadrat ABED der 5ten Figur, (beide Quadrate und die Theile AC in beiden, von einerlei Größe angenommen,) gelegt ist, daß die gleichnamigen Winkelpunkte auf einander fallen, wie Figur 5. Nr. 2. zeigt. Endlich in Langsdorf's Darstellung wird das Quadrat ABED der 4ten Figur nicht construirt, sondern blos das Schema der 5ten Figur gebraucht, und bei dem Beweis die Buchstabenrechnung angewendet. Nemlich es sey in der 5ten Figur $AC = a$, und $AH = b$, so ist $AB = a + b$. Ferner sey die Fläche des

Quadrats ABED = f, des Quadrats CHMN = g, und des Dreiecks ACH = h, so ist $f = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Es ist aber auch $f = g + 4h$, (nach dem Schema der 5ten Figur,) also ist $g + 4h = a^2 + 2ab + b^2$. Nun ist $h = \frac{ab}{2}$, folglich $4h = 2ab$, daher $g + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$, und wenn man 2ab auf beiden Seiten der Gleichung subtrahirt, so ist das Quadrat g der Hypotenuse $= a^2 + b^2$.

Zweite Art des Beweises.

Lehrsatz. (Fig. 6, Nr. 1. u. 2.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck ABC, ist das Quadrat der Hypotenuse BC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Anmerkung.

Wenn AB die größere Kathete ist, so gehört die 6te Figur, Nr. 1. hieher, ist aber AB die kleinere Kathete, so betrachte man das Schema der 6ten Figur, Nr. 2.

Beweis.

Man beschreibe auf der Kathete AB das Quadrat ABED, mache DI = der andern Kathete AC, und beschreibe auf DI das Quadrat DIFH, so ist FI = AC und FH = AC, auch liegt HD mit DE in einer geraden Linie, weil bei D rechte Winkel sind. Man mache ferner EG = AC und ziehe CF, FG und GB. Da AC = DI ist, so ist AC — AI = DI — AI oder CI = AD, es ist aber auch AD = BE, also ist CI = BE = AB. Da EG = AC = DI = HD ist, so ist, (wenn man von EG und HD die gemeinschäftliche Linie DG wegnimmt,) HG = DE,

und da DE = BE ist, so sind HG, BE, AB und CI gleich. Nun sind auch AC, FI, FH und EG gleich, und die Winkel bei den Punkten A, I, H und E rechte Winkel, also sind die vier Dreiecke ABC, ICF, HGF und EBG congruent, folglich BC, CF, FG und BG gleich, daher das Viereck CBGF gleichseitig. Es ist aber auch rechtwinklich, denn der Winkel x des gegebenen rechtwinklichen Dreiecks ABC ist dem Winkel y, in dem mit dem Dreieck ABC congruenten Dreieck EBG gleich, der Winkel ABE oder z + y aber ist ein rechter Winkel, also ist z + x oder CBG auch ein rechter Winkel, folglich das gleichseitige Viereck CBGF ein Quadrat, und zwar das Quadrat der Hypotenuse BC.

Nun besteht dieses Quadrat aus den zwei congruenten Dreiecken ABC, ICF und aus der fünfseitigen Figur ABGFIA. Aber die beiden Quadrate FIDH und ABED bestehen auch aus zwei Dreiecken EBG und HGF, welche mit den eben genannten Dreiecken ABC und ICF congruent sind, und aus der nemlichen fünfseitigen Figur ABGFIA, also haben die beiden Quadrate FIDH und ABED zusammen die nemlichen Theile, wie das Quadrat CBGF, also sind sie zusammen diesem Quadrat gleich. Nun sind aber FIDH und ABED die Quadrate der beiden Katheten AC und AB, also ist die Summe der beiden Kathetenquadrate dem Quadrat der Hypotenuse gleich.

Anmerkung.

Diese Art des Beweises findet sich in Stöber's Dissertation, Seite 18., ist aber da nicht gehörig ausgeführt, und in Schulz Anfangsgründen der reinen Mathesis, Königsberg. 1790., und zwar Seite 407. Ferner in Clairaut Anfangsgründen der Geometrie, übersetzt von Bierling. 1753.

Dritte Art des Beweises.

Lehnsatz. (Fig. 7.)

Wenn eine gerade Linie AD in einem beliebigen Punkt G in zwei Theile AG und DG getheilt wird, so ist die Summe des Quadrats der ganzen Linie AD und des Quadrats des Theils AG der Summe des Quadrats des andern Theils DG und des Doppelten eines Rechtecks gleich, dessen anliegende Seiten die ganze Linie AD und der erste Theil AG sind. (Euklid's Elemente, 2. B. 7. Satz.)

Beweis.

Man ziehe die Diagonale AM, hierauf durch den Punkt G die GN mit AL, und durch den Durchschnittspunkt R die PQ mit AD parallel, so besteht das Quadrat ADML aus den vier Rechtecken AGRP, GDQR, PRNL und RQMN, also ist ADML + AGRP = AGRP + GDQR + AGRP + PRNL + RQMN. Aber AGRP + GDQR machen das Rechteck ADQP, und AGRP + PRNL das Rechteck AGNL aus, also ist ADML + AGRP = Rechteck ADQP + Rechteck AGNL + RQMN. Es ist aber AGRP das Quadrat des Theils AG und RQNM das Quadrat des andern Theils DG, (wie in dem Lehnsatz der ersten Art des Beweises gezeigt wurde,) also ist ADML + Quadrat des Theils AG = R. ADQP + R. AGNL + Quadrat des andern Theils DG. Aber die Rechtecke GDQR und PRNL sind gleich, (nach dem Beweis des eben angeführten Lehnsatzes,) also sind auch die Rechtecke ADQP und AGNL gleich, folglich ist R. ADQP + R. AGNL = dem doppelten Rechteck ADQP, aber ADQP

ist ein Rechteck, dessen eine Seite AD und die anliegende AP = AG ist. Nun war ADML (oder das Quadrat der ganzen Linie AD,) + Quadrat des Theils AG = R. ADQP + R. AGNL + Quadrat des andern Theils DG, folglich ist auch das Quadrat der ganzen Linie AD + Quadrat des Theils AG = dem Doppelten eines Rechtecks, dessen eine Seite die ganze Linie AD und die anliegende Seite der Theil AG ist, + dem Quadrat des andern Theils DG.

Lehrsatz. (Fig. 8.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck ABC ist das Quadrat der Hypotenuse AC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Beweis.

Man beschreibe auf der Hypotenuse AC das Quadrat ACIH, ferner auf AC das Dreieck ADC, dessen eine Seite AD = der Kathete AB, und die andere Seite CD der Kathete BC gleich, und welches folglich mit dem gegebenen rechtwinklichen Dreieck ABC congruent ist. Man mache AG = BC oder = CD, und beschreibe auf DG, (welche Linie = AB — BC ist,) das Quadrat DEFG. Endlich verbinde man die Punkte E und I, so wie auch die Punkte F und H mit den geraden Linien EI und FH.

Da das Viereck DEFG ein Quadrat ist, so hat es lauter rechte Winkel, und gleiche Seiten. Da nun ADC auch ein rechter Winkel ist, so liegen CD und DE in einer geraden Linie. Nun ist in den beiden Dreiecken ACD und CIE die Seite CI = AC, CE = AD, (weil CE = CD + DE und AD = AG + GD, oder = AG + DE, oder = CD + DE ist,) ferner ist der Winkel ACI oder w + z im Quadrat ACIH ein rechter Winkel, aber im rechtwink-

lichen Dreieck ADC ist w + u auch einem rechten Winkel gleich, folglich ist w + u = w + z, und daher z = u. Also sind die beiden Dreiecke ACD und CIE congruent, folglich ist EI = CD, und CEI ein rechter Winkel. Da nun DEF im Quadrat DEFG auch ein rechter Winkel ist, so liegen FE und EI in einer geraden Linie. Nun ist in den Dreiecken FHI und CIE die Seite HI = CI, FI = CE, (weil FE = ED und EI = CD, folglich FE + EI oder FI = ED + CD oder = CE ist,) auch ist CIH oder m + n ein rechter Winkel, aber im rechtwinklichen Dreieck CIE ist m + z auch = R, also ist n = z, daher das Dreieck FHI congruent mit dem Dreieck CIE, also ist FH = EI, und der Winkel HFI ein rechter Winkel, aber im Quadrat DEFG ist EFG auch ein rechter Winkel, folglich sind HF und FG in einer geraden Linie. Endlich läßt sich auf ähnliche Art zeigen, daß die Dreiecke GAH und FHI congruent sind, denn es ist AH = HI, GH = FI, (weil FH = EI, und FG = FE ist,) und die Winkel t und n sind gleich, (weil t + r = n + r ist,) folglich sind die vier rechtwinklichen Dreiecke ACD, CIE, IFH und HGA im Quadrat ACIH congruent, auch ist jedes von ihnen mit dem gegebenen rechtwinklichen Dreieck ABC congruent. Ferner betragen je zwei dieser vier congruenten Dreiecke so viel als ein Rechteck, dessen anliegende Seiten AB und BC, oder AD und AG sind, also betragen alle vier im Quadrat ACHI enthaltenen Dreiecke so viel als das Doppelte eines Rechtecks, dessen anliegende Seiten AD und AG sind.

Nun ist das Quadrat der Linie AD + Quadrat des Theils AG = dem Quadrat des andern Theils DG + dem Doppelten eines Rechtecks, dessen anliegende Seiten AD und AG sind, (voriger Lehnsatz,) also ist, (da nach der Construction AD = AB, AG = BC und das Quadrat des

Theils DG das Quadrat DEFG ist,) das Quadrat der Kathete AB + Quadrat der Kathete BC = dem Quadrat DEFG + den vier congruenten Dreiecken ACD, CIE, IFH und HGA. Allein das Quadrat ACIH der Hypotenuse AC besteht aus dem Quadrat DEFG und diesen eben genannten vier congruenten Dreiecken, also ist das Quadrat der Kathete AB + Quadrat der Kathete BC = dem Quadrat der Hypotenuse AC.

Anmerkung.

Diese Konstruction habe ich in dem Buch: Stern und Kern der Algebra von Heinrich Meißner, zweite vermehrte Ausgabe, Hamburg. 1740., im Vorbericht, Seite XV, gefunden. Der Beweis ist aber von Meißner blos vermittelst der Buchstabenrechnung gegeben, und nimmt folgenden Gang:

Es sei in der 8ten Figur die Kathete AB = y und die Kathete BC = x, so ist nach der Konstruction DG = y — x, also das Quadrat des Theils DG = $y^2 - 2xy + x^2$. Hat man nun, wie vorhin, gezeigt, daß die vier Dreiecke ADC, CEI, HFI und AGH unter sich und mit dem gegebenen rechtwinklichen Dreieck ABC congruent sind, so ist ferner, (da die Fläche des Dreiecks ABC = $\frac{1}{2}xy$ ist,) auch

die Fläche des Dreiecks ADC = $\frac{1}{2}xy$
die Fläche des Dreiecks CEI = $\frac{1}{2}xy$
die Fläche des Dreiecks HFI = $\frac{1}{2}xy$
die Fläche des Dreiecks AGH = $\frac{1}{2}xy$
dazu die Fläche des Quadrats DEFG = $y^2 - 2xy + x^2$

Summe, als Fläche des Quadrats ACIH = $y^2 + x^2$

Das Quadrat ACIH ist aber das Quadrat der Hypotenuse AC, also ist dieses = $y^2 + x^2$.

Ich habe aber den vorigen Beweis, vermittelst des aus Euklid entlehnten Satzes, (nemlich des 7ten, im 2ten Buch der Elemente,) ganz synthetisch durchgeführt.

Vier-

Vierte Art des Beweises.

Lehrsatz. (Fig. 9.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck ABC ist die Summe der beiden Kathetenquadrate dem Quadrat der Hypotenuse BC gleich.

Beweis.

Man beschreibe auf der Hypotenuse BC das Quadrat BCDE, und auf jeder Seite dieses Quadrats einen Halbkreis. Man trage in den auf der Seite BC beschriebenen Halbkreis die Sehne BG = AC ein, und ziehe CG, so ist der Peripheriewinkel BGC im Halbkreis ein rechter Winkel, und da auch BC gemeinschäftlich ist, so ist das Dreieck BGC mit dem Dreieck BAC congruent, also CG = AB. Man verlängere CG bis H, und ziehe DH. Da BCG + GCD = R, und BCG + CBG auch = R, (als die beiden spitzigen Winkel in dem rechtwinklichen Dreieck BGC,) so ist GCD = CBG, und da überdieß CD = CB im Quadrat BCDE, so ist das bei H rechtwinkliche Dreieck CHD congruent mit dem rechtwinklichen Dreieck BGC, also CH = BG und HD = CG. Man verlängere ferner DH bis I und ziehe EI. Es kann nun auf ähnliche Art gezeigt werden, daß das Dreieck DIE mit dem Dreieck CHD congruent ist, folglich ist EI = DH, und DI = CH. Endlich verlängere man EI bis sie die Linie BG irgendwo trift, dieß sei z. B. im Punkt F. Nun ist BE = DE, (als Seiten des Quadrats BCDE,) die Winkel BEF + DEI = R, auch ist EDI + DEI = R, also BEF = EDI, auch ist EBF + CBG = R, also ist EBF + CBG = EDI + DEI, der Winkel EDI ist aber dem Winkel CBG gleich, (weil

die Dreiecke DIE, CHD und BGC congruent sind,) also ist EBF = DEI, folglich, (da in den beiden Dreiecken BFE und DIE BE = DE, BEF = EDI und EBF = DEI ist,) sind diese beiden Dreiecke congruent, daher die vier im Quadrat BCDE befindlichen Dreiecke congruent. Da nun DI = CH und HD = CG war, so ist DI — HD = CH — CG, oder HI = GH, und da bei F, G, H und I rechte Winkel sind, so ist das Viereck FGHI ein Quadrat. Da ferner BF = CG = AB und BG = AC, auch BG — BF = FG ist, so ist FG = AC — AB. Hierauf wird der Beweis fortgeführt, wie in dem vorigen Lehrsatz Oder wenn man die Buchstabenrechnung anwenden will, so sei AC = a, AB = b und BC = c. Nun ist FG = AC — AB = a — b, folglich $(FG)^2$ oder das Quadrat FGHI = $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Ferner ist das rechtwinkliche Dreieck BAC = $\frac{1}{2}ab$, also auch jedes der vier congruenten und im Quadrat BCDE befindlichen rechtwinklichen Dreiecke = $\frac{1}{2}ab$, also alle vier zusammen = 2ab. Nun enthält das Quadrat BCDE der Hypotenuse BC oder c^2 ausser diesen vier Dreiecken = 2ab noch das Quadrat FGHI = $a^2 - 2ab + b^2$, die Summe also, nemlich $a^2 + b^2$ ist = c^2.

Anmerkung.

Diese Art der Construction ist von der vorigen verschieden, aber die vollendete Construction, oder das Schema der Figur ist mit dem vorigen einerlei, so wie auch der Beweis. Übrigens findet man diese Construction in Sturm's math. enucl. Seite 183, und in Stöber's Dissertation. Nur sehe ich nicht ein, zu was der vierte Halbkreis BFE nützen soll, wenigstens habe ich ihn bei dem Beweis für die Congruenz der vier Dreiecke nicht gebraucht. Sollte er angewendet werden, so dürfte EI nicht verlängert, sondern es müßte durch die in der Peripherie bestimmten Punkte I und F

die Linie IF gezogen, und gezeigt werden, daß sie mit EI in einer geraden Linie liegt.

Fünfte Art des Beweises.

Lehrsatz. (Fig. 10.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck ABC ist das Quadrat der Hypotenuse BC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Beweis.

Man beschreibe auf den beiden Katheten AB und AC ihre Quadrate ABDE und ACFG, ziehe aus Punkt A des gegebenen rechtwinklichen Dreiecks ABC auf die Hypotenuse BC die senkrechte Linie AL, und durch die Endpunkte B und C der Hypotenuse die Linien BH und CI mit AL parallel, so wird BH mit DE oder deren Verlängerung zusammentreffen, und CI mit FG oder deren Verlängerung. Denn da BH und CI mit der senkrechten AL parallel sind, so sind CBH und BCI rechte Winkel, nun sind aber in dem bei A rechtwinklichen Dreieck BAC die Winkel ABC und ACB spitzige Winkel, folglich sind auch ABH und ACI spitzige Winkel, also ist ABH ein Theil des rechten Winkels ABD, und ACI ein Theil des rechten Winkels ACF, folglich sind auch DBH und FCI spitzige Winkel, aber bei D und F sind rechte Winkel, also ist DBH + D kleiner als zwei rechte, und eben so FCI + F, folglich treffen DE und BH so wie auch CI und FG, oder ihre Verlängerungen zusammen. Es treffe also CI mit FG im Punkt I, und BH mit der verlängerten DE im Punkt H zusammen. Man ziehe IH, und verlängere die senkrechte AL,

bis sie mit IH zusammentrift, dieses sei im Punkt K. Endlich ziehe man AI und AH.

Da ICB und FCA rechte Winkel sind, so ist, wenn der gemeinschäftliche Winkel ICA weggenommen wird, ACB = FCI, also sind, (weil auch FC = AC ist,) die rechtwinklichen Dreiecke FIC und ABC congruent, folglich CI = CB. Eben so, da CBH und ABD rechte Winkel sind, so ist, wenn der gemeinschäftliche Winkel ABH weggenommen wird, CBA = HBD, da nun auch AB = BD ist, so sind die rechtwinklichen Dreiecke DHB und ACB congruent, folglich HB = CB. Da aber, nach dem Erwiesenen, CI = CB ist, so ist auch HB = CI, da überdieß CI und HB parallel sind, weil jede mit AL parallel ist, auch die Winkel BCI und CBH rechte Winkel sind, so folgt daraus, daß die vierseitige Figur CBHI ein Quadrat, und zwar das Quadrat der Hypotenuse BC ist.

Nun ist das Quadrat ACFG das Doppelte des Dreiecks CIA, welches mit demselben auf der nemlichen Grundlinie AC und zwischen einerlei Parallelen steht, es ist aber auch das Rechteck CLKI das Doppelte dieses nemlichen Dreiecks CIA, welches mit diesem Rechteck auf der nemlichen Grundlinie CI und zwischen einerlei Parallelen IC und KL steht, weil die Spitze A des Dreiecks in der Linie KL liegt. Da also das Quadrat ACFG und das Rechteck CLKI das Doppelte des nemlichem Dreiecks CIA sind, so sind sie einander gleich.

Ferner ist das Quadrat ABDE das Doppelte des Dreiecks AHB, das mit demselben auf der nemlichen Grundlinie AB und zwischen einerlei Parallelen AB und DH steht, es ist aber auch das Rechteck LBHK das Doppelte dieses Dreiecks AHB, das mit demselben auf der nemlichen Grundlinie BH und zwischen einerlei Parallelen

BH und LK steht, da die Spitze A desselben in der Linie LK liegt, also ist das Rechteck LBHK dem Quadrat ABDE gleich.

Nun sind die beiden Rechtecke CLKI und LBHK die Theile des Quadrats CBHI, folglich ist das Quadrat der Hypotenuse BC der Summe der beiden Quadrate der Katheten AC und AB gleich.

Anmerkung.

Diese Construction hat Clavius erfunden, und in seiner lateinischen mit einem Commentar begleiteten Übersetzung der Elemente Euklid's zuerst bekannt gemacht. Sie steht in der Frankfurter Oktavausgabe vom Jahr 1654 seines Commentars, Seite 149. Sie findet sich aber auch in J. C. Sturm's mathesi enucleata, Seite 32, und Sturm stellt sie als seine eigene Erfindung auf. Stöber hat sie auch in seine Dissertation aufgenommen, man findet sie da Seite 18, aber der Beweis, welchen er giebt, ist sehr mangelhaft. Indessen wird er ziemlich weitläufig, wenn man, wie ich gethan habe, auf alle Umstände Rücksicht nimmt.

Sechste Art des Beweises.

Lehrsatz. (Fig. 11.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck ABC ist das Quadrat der Hypotenuse BC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Beweis.

Man beschreibe auf den Katheten AB und AC ihre Quadrate ABDE und ACFG. Da bei A rechte Winkel sind, so liegen AE und AC in einer geraden Linie, so wie auch AB und AG.

Man errichte ferner auf BC aus dem Endpunkt B eine senkrechte Linie, und verlängere sie, bis sie mit DE oder deren Verlängerung, in einem Punkt, z. B. H zusammentrift, (welches geschehen muß, weil der Winkel CBA spitzig ist, folglich die senkrechte Linie BH zwischen AB und BD liegt, also HBD ein spitziger Winkel ist,) errichte gleichfalls auf BC aus dem Endpunkt C eine senkrechte Linie, und verlängere sie, bis sie mit FG oder deren Verlängerung in einem Punkt, z. B. in I zusammentrift, (welches geschehen muß, weil die senkrechte Linie CI zwischen AC und CF liegt,) verbinde die beiden Punkte H und I mit der geraden Linie HI, ziehe aus dem Winkelpunkt F auf BH die senkrechte FK, und aus dem Winkelpunkt D auf CI die senkrechte DL, so sind FK und DL mit BC parallel, also auch bei P und Q rechte Winkel, weil BH und CI mit BC rechte Winkel bilden.

Nun ist 1) zu beweisen, daß die vierseitige Figur BCIH das Quadrat der Hypotenuse BC ist. Da nemlich CBH und ABD rechte Winkel sind, so ist, wenn der gemeinschäftliche Winkel GBH weggenommen wird, HBD = ABC, folglich sind, weil auch BD = AB ist, die beiden rechtwinklichen Dreiecke BDH und BAC congruent, also BH = BC. Ferner, da ICB und FCA rechte Winkel sind, so ist, wenn der gemeinschaftliche Winkel ICA weggenommen wird, FCI = ACB, folglich sind, weil auch CF = CA ist, die beiden rechtwinklichen Dreiecke CFI und BAC congruent, also ist CI = BC. Da nun BH = BC war, so sind BH, BC und CI gleich, und da auch BCI und CBH rechte Winkel sind, so ist das Viereck BCIH ein Quadrat, und zwar, weil es auf BC steht, das Quadrat der Hypotenuse.

Nun ist 2) zu beweisen, daß dieses Quadrat den beiden Quadraten ABDE und ACFG der Katheten AB und AC, zusammen gleich ist.

Da die Dreiecke BDH und CFI mit dem Dreieck BAC congruent sind, so sind sie auch mit einander congruent, also ist DH = CF und BHD = FCI, und da bei P und Q rechte Winkel sind, so sind die Dreiecke DPH und FQC congruent, also ist CQ = HP, und da in dem Rechteck CQKB die gegenüberstehenden Seiten CQ und BK gleich sind, auch CQ = HP war, so ist BK = HP, folglich das Rechteck BKQC dem Rechteck PHIL gleich. Nun machen die Rechtecke PHIL und BPLC zusammen das Quadrat BCIH aus, folglich betragen auch die beiden Rechtecke BKQC und BPLC so viel als das Quadrat BCIH.

Ferner ist das Parallelogramm BDMC dem Quadrat ABDE gleich, weil es mit demselben auf der nemlichen Grundlinie BD, und zwischen einerlei Parallelen BD und CE steht. Es ist aber das Parallelogramm BDMC auch dem Rechteck BPLC gleich, weil es mit ihm auf der nemlichen Grundlinie BC und zwischen einerlei Parallelen DL und BC steht, folglich ist das Quadrat ABDE dem Rechteck BPLC gleich.

Endlich ist das Parallelogramm CFNB dem Quadrat ACFG gleich, weil es mit demselben auf der nemlichen Grundlinie CF und zwischen einerlei Parallelen CF und BG steht. Es ist aber das Parallelogramm CFNB auch dem Rechteck BKQC gleich, mit dem es auf der nemlichen Grundlinie BC und zwischen einerlei Parallelen BC und KF steht, folglich ist das Quadrat ACFG dem Rechteck BKQC gleich.

Da nun nach dem vorhin Erwiesenen, die Rechtecke BPLC und BKQC zusammen dem Quadrat der Hypotenuse gleich sind, so sind auch die beiden Quadrate ABDE und ACFG der Kathete AB und AC, von denen jedes einem der gedachten Rechtecke gleich ist, zusammen dem Quadrat BCIH der Hypotenuse BC gleich.

Anmerkung.

Diese Construction ist gleichfalls eine Erfindung des Clavius, der sie in seinem Commentar der Elemente bekannt machte. (Siehe die Ausgabe von 1654, Seite 150.) In Stöber's Dissertation findet man sie nicht. Sie war ihm also nicht bekannt, und die vorige Construction des Clavius hatte er blos aus Sturm's mathesi enucleata genommen, auch für Sturm's Erfindung gehalten.

Siebente Art des Beweises.

Lehrsatz. (Fig. 12.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck BAC ist das Quadrat der Hypotenuse BC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Beweis.

Man beschreibe auf der Kathete AB das Quadrat ABDE, und auf der Kathete AC das Quadrat ACGF, verlängere die Seiten DE und GF nach H zu, (welche Verlängerungen zusammentreffen werden, weil bei E und F rechte Winkel sind, folglich, wenn man von E nach F eine gerade Linie zieht, an dieser zwei spitzige Winkel entstehen, deren Summe also kleiner als zwei rechte ist,) und ziehe von ihrem Durchschnittspunkt H zu der Spitze A des recht-

winklichen Dreiecks BAC die gerade Linie HA, welche verlängert die Hypotenuse BC in einem Punkt I schneiden wird. Ferner ziehe man mit AH durch die Endpunkte B und C der Hypotenuse die Linien BK und CL parallel, so wird BK die DE oder ihre Verlängerung schneiden, (denn die Linie DH, welche die eine Parallele AH schneidet, schneidet auch die andere Parallele BK,) eben so wird CL die FG oder ihre Verlängerung schneiden. Endlich verbinde man diese Durchschnittspunkte K und L mit der geraden Linie KL.

Nun ist 1) zu beweisen, daß das Viereck BCLK das Quadrat der Hypotenuse ist. Nemlich die Parallelen BK und AH zwischen den Parallelen HK und AB sind gleich, auch sind die Parallelen CL und AH zwischen den Parallelen HL und AC gleich, also ist CL = BK, es ist aber auch CL mit BK parallel, (weil CL und BK mit AH parallel gezogen wurde,) folglich ist das Viereck BCLK ein Parallelogramm. Ferner ist das rechtwinkliche Dreieck AEH mit dem rechtwinklichen Dreieck BAC congruent, (weil AE = AB, und in dem Parallelogramm EAFH die Seite EH der gegenüberstehenden Seite AF gleich ist, ferner AF = AC, folglich EH = AC ist,) also ist der Winkel AHE = dem Winkel ACB, und AH = BC, daher, (weil BK = AH,) ist auch BK = BC, folglich das Parallelogram BCLK gleichseitig. Nun ist in dem Parallelogramm ABKH der Winkel ABK dem gegenüberstehenden AHK gleich, und AHK oder AHE ist als Winkel des Dreiecks AEH dem Winkel ACB des Dreiecks BAC gleich, also ist ABK = ACB. Aber in dem Dreieck BAC ist ACB + ABC = R, also ist ABK + ABC auch = R. Folglich ist das gleichseitige Parallelogramm BCLK rechtwinklich, daher

ein Quadrat, und zwar, weil es auf BC steht, das Quadrat der Hypotenuse.

Endlich ist 2) zu beweisen, daß dieses Quadrat der Summe der Quadrate BAED und ACGF gleich ist. Nemlich das Quadrat BAED ist dem Parallelogramm BAHK gleich, mit welchem es auf einerlei Grundlinie AB und zwischen den nemlichen Parallelen AB und DH steht. Dieses Parallelogramm BAHK ist aber dem Rechteck BIMK gleich, mit welchem es auf einerlei Grundlinie BK und zwischen den nemlichen Parallelen BK und IH steht. Also ist das Quadrat BAED dem Rechteck BIMK gleich. Ferner ist das Quadrat ACGF dem Parallelogramm ACLH gleich, mit welchem es auf einerlei Grundlinie AC und zwischen den nemlichen Parallelen AC und HG steht, dieses Parallelogramm ACLH aber ist dem Rechteck CIML gleich, mit welchem es auf einerlei Grundlinie CL und zwischen den nemlichen Parallelen CL und IH steht, also ist das Quadrat ACGF dem Rechteck CIML gleich. Nun machen die beiden Rechtecke BIMK und CIML das Quadrat BCLK der Hypotenuse aus, also beträgt die Summe der Quadrate BAED und ACGF der beiden Katheten AB und AC so viel als das Quadrat der Hypotenuse BC.

Anmerkung.

Dieses ist die dritte, von Clavius erfundene, und in seiner Übersetzung und Commentar der Elemente des Euklid's bekannt gemachte Construction, zum Behuf des Beweises des pythagoräischen Lehrsatzes. Sie ist unstreitig die vorzüglichste von allen bis jetzt bekannten, weil sie einfach ist, und sich dennoch einem noch allgemeinern Satz, als der pythagoräische ist, anpassen läßt, wie in der Folge gezeigt werden soll, und auch Klügel in seinen Anfangsgründen der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie, bemerkt, der im §. 119. der

Geometrie, den Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes vermittelst dieser Konstruction des Clavius vorgetragen hat. In Stöber's Dissertation befindet sich diese Construction nicht, sie war ihm also unbekannt, wie die vorige.

Achte Art des Beweises.

Lehrsatz. (Fig. 13.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck BAC ist das Quadrat der Hypotenuse BC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Beweis.

Man beschreibe auf den beiden Katheten AB und AC ihre Quadrate ABFG und ACHI, und verlängere FG und HI, bis sie sich in K schneiden. Hierauf mache man KE = AB, und HD = AB und ziehe aus den Endpunkten B und C der Hypotenuse die Linien BE und CD, ferner DE und endlich AK. Nun sind die beiden rechtwinklichen Dreiecke BAC und DHC congruent, denn es ist DH = AB, (nach der Construction,) und CH = AC, (als Seiten eines Quadrats,) folglich ist CD = BC und DCH = BCA. Da aber DCH + ACD einem rechten Winkel gleich ist, so ist auch BCA + ACD oder der Winkel BCD ein rechter Winkel. Ferner sind die Dreiecke BFE und BAC congruent. Denn es ist FG = AB = KE, also FG + GE = KE + GE oder FE = GK, aber im Parallelogramm AGKI ist GK = AI = AC, also ist FE = AC, überdieß ist BF = AB, daher ist das rechtwinkliche Dreieck BFE mit dem rechtwinklichen Dreieck BAC congruent, folglich ist BE = BC, und EBF = ABC. Da

nun EBF + EBQ ein rechter Winkel ist, so ist ABC + EBQ oder der Winkel CBE auch ein rechter Winkel. Im Viereck BCDE sind also zwei rechte Winkel, nemlich CBE und BCD, also ist BE mit CD parallel, es ist aber auch BE = BC = CD, also ist das Viereck BCDE ein Quadrat, und zwar das Quadrat der Hypotenuse BC. Man vergleiche hierauf das rechtwinkliche Dreieck DKE mit dem rechtwinklichen Dreieck BAC. Da IK = AG = AB = DH ist, so ist KI + ID = DH + ID, oder DK = HI, aber, da HI = AC, so ist DK = AC, nun ist auch KE = AB, (nach der Construction,) also ist das rechtwinkliche Dreieck DKE mit dem rechtwinklichen Dreieck BAC congruent. Da ferner AI = AC, IK = AB, und bei I rechte Winkel sind, so ist auch das rechtwinkliche Dreieck AIK mit dem rechtwinklichen Dreieck BAC congruent. Nun theilt die Diagonale AK das Rechteck AGKI in zwei congruente Dreiecke, folglich sind die sechs Dreiecke AGK, AIK, BFE, BAC, CHD und DKE congruent. Also ist Dreieck BFE + Dreieck CHD + Dreieck DKE = Dreieck BAC + Dreieck AGK + Dreieck AIK.

Nun ist die fünfseitige Figur BCHKFB = Quadrat BCDE + Dreieck BFE + Dreieck CHD + Dreieck DKE.

Die nemliche fünfseitige Figur ist aber auch = Quadrat ABFG + Quadrat ACHI + Dreieck BAC + Dreieck AGK + Dreieck AIK.

Nimmt man nun von jeder der beiden gleichen Summen die drei congruenten Dreiecke hinweg, so ist Quadrat BCDE = Quadrat ABFG + Quadrat ACHI. Nemlich das Quadrat der Hypotenuse BC ist gleich der Summe der beiden Quadrate der Katheten AB und AC.

Anmerkung.

Diesen Beweis hat Franz van Schooten im ersten Buch seiner exercitationum mathematicarum, und Stöber in seiner Dissertation, Seite 22 gegeben, aber nicht gehörig ausgeführt. Denn er nimmt die Construction schon als vollendet an, und bestimmt nicht wie sie gemacht werden soll. Auch beweiset er nicht, daß die sechs Dreiecke congruent sind, sondern setzt voraus, daß jeder diese Congruenz sogleich in der Anschauung finden wird, welches nun doch nicht der Fall seyn möchte. Eben so nimmt er ferner als ausgemacht an, daß das Viereck BCDE ein Quadrat ist.

Neunte Art des Beweises.

Lehrsatz. (Fig. 13.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck BAC ist das Quadrat der Hypotenuse BC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Beweis.

Auf den beiden Katheten AB und AC beschreibe man ihre Quadrate ABFG und ACHI, so ist, da bei dem Punkt A rechte Winkel sind AI mit AB in einer geraden Linie. Hierauf verlängere man FG und HI, bis sie sich im Punkt K schneiden, mache KE = AB, HD = AB, ziehe BE, CD und DE. In den beiden rechtwinklichen Dreiecken BAC und DHC ist HD = AB und CH = AC, also sind sie congruent, folglich ist CD = BC und DCH = BCA. Da nun DCH + ACD = R ist, so ist auch BCA + ACD, das heißt: BCD ein rechter Winkel. Ferner ist in den rechtwinklichen Dreiecken BFE und BAC, FG = AB = KE, also FG + GE oder FE = KE + GE oder = KG, im

Rechteck AIKG ist aber KG = IA = AC, folglich ist FE = AC, und da auch BF = AB ist, so sind diese beiden rechtwinklichen Dreiecke congruent, daher ist BE = BC, und EBF = ABC. Es ist aber EBF + EBQ ein rechter Winkel, folglich auch ABC + EBQ oder der Winkel CBE. Das Viereck BCDE hat also zwei rechte Winkel BCD und CBE, folglich zwei parallele Seiten CD und BE, aber jede dieser Seiten ist auch = BC, daher ist dieses Viereck ein rechtwinkliches gleichseitiges Parallelogramm, oder ein Quadrat, und zwar das der Hypotenuse BC. Endlich ist in den beiden rechtwinklichen Dreiecken DKE und BAC, IK = AG = AB = DH, also KI + ID oder DK = DH + ID oder = HI, oder = AC, ferner KE = AB, folglich sind sie congruent. Es sind daher die vier rechtwinklichen Dreiecke BAC, CHD, EKD und BFE congruent.

Ferner ist das bei E rechtwinkliche Dreieck BEQ mit dem bei B rechtwinklichen Dreieck CBR congruent. Denn es ist BE = BC, und EBQ oder RBA = BCR, (weil das Dreieck ABR bei A rechtwinklich ist, und den Winkel ARB mit dem Dreieck CBR gemein hat,) folglich ist das Dreieck BEQ — Dreieck ABR = Dreieck CBR — Dreieck ABR, das heißt: Viereck ERAQ ist = dem Dreieck BAC, folglich ist das Viereck ERAQ auch dem Dreieck BFE oder dem Dreieck EGR + Trapezium FBRG gleich.

Da ferner das Dreieck EKD congruent mit dem Dreieck BFE ist, so ist der Winkel EDK = dem Winkel BEF und DK = EF, da aber KI = AG = FG ist, so ist DK — KI = EF — FG, das ist: DI = EG, also ist das bei I rechtwinkliche Dreieck IDQ mit dem bei G rechtwinklichen Dreieck EGR congruent. Nun war das Viereck ERAQ = dem Dreieck EGR + Trapezium FBRG, daher

ist dieses Viereck auch gleich dem Dreieck IDQ + Trapezium FBRG.

Nun sind die Theile des Quadrats BCDE der Hypotenuse, 1) das Dreieck BAC, 2) das Viereck ACDQ, 3) das Viereck ERAQ und 4) das Dreieck ABR, oder weil nach dem Erwiesenen das Dreieck CHD dem Dreieck BAC, und das Viereck ERAQ dem Dreieck IDQ + Trapezium FBRG gleich ist, so ist das Quadrat BCDE der Hypotenuse = Dreieck CHD + Viereck ACDQ + Dreieck IDQ + Trapezium FBRG + Dreieck ABR.

Aber die Theile des Quadrats ACHI der Kathete AC sind, 1) das Dreieck CHD, 2) das Viereck ACDQ und 3) das Dreieck IDQ.

Und die Theile des Quadrats ABFG der Kathete AB sind 1) das Trapezium FBRG und 2) das Dreieck ABR.

Also ist das Quadrat BCDE der Hypotenuse BC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Anmerkung.

Die bei dieser Beweisart erforderliche Construction ist mit der vorigen einerlei, nur bleibt die Hülfslinie AK weg. Aber es werden hier andere Stücke verglichen, als in dem vorigen Beweis, welcher einfacher ist. Franz van Schooten, in dessen ersten Buch der exercit. math. Seite 111. diese Beweisart vorgetragen ist, führt den D. Andreas van Oudts-hoorn als Erfinder derselben an. Stöber aber, der sie in seiner Dissertation, Seite 23. gleichfalls vorträgt, sagt: haec ea demonstratio est qua utitur P. Gregorius a S. Vincentio in opere geom. de circuli quadratura, L. I. part. 2., prop. XLIII. Wenn nun dieses der Fall ist, welches ich nicht beurtheilen kann, weil ich des Gregorius Werk nicht besitze, so möchte wohl Gregorius der Erfinder seyn. Denn sein Werk von der Quadratur der Kreisfläche und den Kegelschnitten kam schon

im Jahr 1647. heraus, aber die exercit. math. des Franz van Schooten erst 1657.

Zehnte Art des Beweises.

Lehrsatz. (Fig. 14.)

In jedem rechtwinkwinklichen Dreieck BAC ist das Quadrat der Hypotenuse BC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Beweis.

Man beschreibe auf der Kathete AB das Quadrat ABFG, und auf der Kathete AC das Quadrat ACHI, mache AK = AB und AL = AB, ziehe BK, KL, LG und GB, mache ferner AM = AC und AN = AC, und ziehe CM, MN, NI und IC. Auch ziehe man BN und IK, verlängere BG bis O und BK bis P, und errichte aus dem Endpunkt C der Hypotenuse BC auf solcher eine senkrechte Linie CD. Wenn nun AC = AB ist, so ist der Winkel ACD = $\frac{1}{2}$R, der Winkel ACI ist aber auch = $\frac{1}{2}$R, daher fällt CD in CI. Allein dieser Fall für ein gleichschenkliches rechtwinkliches Dreieck ist schon besonders im ersten Satz betrachtet, und der Beweis dafür gegeben worden. Es wird also hier angenommen, daß die beiden Katheten AB und AC ungleich, und zwar AC die größere Kathete sei. Da nun AM = AC, nach der Construction, so ist im rechtwinklichen Dreieck CAM der Winkel ACM = $\frac{1}{2}$R, folglich ACB kleiner als $\frac{1}{2}$R, und da ACB + ACD = R, so ist ACD größer als $\frac{1}{2}$R, folglich fällt CD zwischen CI und CH, und schneidet also HI so, daß der Durchschnittspunkt D zwischen H und I liegt. Ferner errichte man

man auf der Hypotenuse BC aus ihrem zweiten Endpunkt B die senkrechte Linie BE, so ist der Winkel ABE kleiner als $\frac{1}{2}$ R, weil der Winkel ABC größer als ein halber rechter Winkel ist, also schneidet die senkrechte BE die Linie AG zwischen A und G, folglich die Linie IO in E zwischen O und I. Endlich ziehe man die Linie DE.

Da AK = AG ist, und bei A rechte Winkel sind, so ist das Dreieck BAG mit dem Dreieck BAK congruent, also BK = BG und GBA = KBA. Da aber das rechtwinkliche Dreieck BAG gleichschenklich ist, so ist GBA = $\frac{1}{2}$ R, also auch KBA = $\frac{1}{2}$ R, folglich GBK = R. Eben so kann man zeigen, daß die rechtwinklichen Dreiecke BAK und LAK congruent sind, folglich KL = KB und der Winkel BKL ein rechter ist. Daher ist das Viereck BKLG ein Quadrat, und da die Dreiecke BAG und BAK, so wie auch die Dreiecke BFG, BAG und LAK congruent sind, so ist das Quadrat ABFG = dem Dreieck BKL. Auf ähnliche Art kann man beweisen, daß das Viereck CINM ein Quadrat, und das Quadrat ACHI dem Dreieck INM gleich ist.

Ferner liegt AI mit AB in einer geraden Linie, weil bei A rechte Winkel sind.

Nun ist BCD ein rechter Winkel, nach der Construction, und ACH ein rechter Winkel im Quadrat ACHI, also ist BCD = ACH. Nimmt man den gemeinschäftlichen Winkel ACD weg, so ist BCA = DCH. Es ist aber auch CH = AC, also sind die beiden rechtwinklichen Dreiecke CHD und BAC congruent, folglich CD = BC und DH = AB. Ferner ist in den rechtwinklichen Dreiecken BAN und BAC die Seite NA = AC, nach der Construction, und AB gemeinschäftlich, daher sind sie congruent, und BN = BC = CD, auch ANB = BCA, so wie NBA = ABC.

Eben so ist in den rechtwinklichen Dreiecken KAI und BAC die Seite AK = AB, (nach der Construction,) und AI = AC, (im Quadrat ACHI,) also sind sie congruent, folglich ist IK = BC. Da nun die Winkel NBA und ABC, nach dem Erwiesenen, gleich sind, so werden, wenn man die gleichen Winkel GBA und ABK wegnimmt, auch die Reste NBO und PBC gleich seyn. Da ferner die Winkel ANB und BCA gleich sind, (nach dem Erwiesenen,) so sind auch, wenn man die gleichen Winkel INA und ACI hinzusetzt, die Summen, nemlich die Winkel ONB und BCP gleich. In den beiden Dreiecken NOB und CPB ist also ONB = BCP, NBO = PBC und BN = BC, folglich sind sie congruent, und daher NO = CP und BO = BP, auch der Winkel NOB = dem Winkel CPB. Nun ist in dem rechtwinklichen gleichschenklichen Dreieck IAN der Winkel ANI oder GNO = $\frac{1}{2}$R, eben so, in dem rechtwinklichen gleichschenklichen Dreieck BAG der Winkel AGB = $\frac{1}{2}$R, folglich auch der Scheitelwinkel NGO = $\frac{1}{2}$R, also ist in dem Dreieck GON die Seite NO = OG, auch der Winkel NOG oder NOB ein rechter Winkel, und sein Nebenwinkel EOB gleichfalls. Da aber nach dem Erwiesenen, wegen der Congruenz der beiden Dreiecke NOB und CPB, der Winkel NOB = dem Winkel CPB ist, so ist der Winkel CPB auch ein rechter. Ferner ist, nach dem Erwiesenen, GBK oder OBP ein rechter Winkel, und CBE nach der Construction auch ein rechter, also ist OBP = CBE, folglich OBP — EBP = CBE — EBP, nemlich OBE = PBC, da überdieß BO = BP ist, (nach dem Erwiesenen,) und bei O und P rechte Winkel sind, so sind die Dreiecke BOE und BPC auch congruent, folglich OE = PC, und BE = BC. Da nun, nach dem Erwiesenen, CD = BC ist, und die Winkel BCD und CBE rechte

Winkel sind, (nach der Construction,) so ist das Viereck BCDE ein Quadrat, und zwar das Quadrat der Hypotenuse BC.

Ferner ist AM = AC = HI, und AB = DH, (nach dem Erwiesenen,) also ist AM — AB = HI — DH, oder BM = DI, da nun ausserdem MN = CI und BN = BC = CD ist, so sind die beiden Dreiecke BMN und ICD congruent. Es sind aber auch die Dreiecke OBE und PIK congruent. Denn da IN = CI, und NO = CP, (nach dem Erwiesenen,) so ist IN — NO = CI — CP, nemlich IO = IP. Nun ist im Dreieck BOI, der Winkel bei O ein rechter, (nach dem Erwiesenen,) und der Winkel IBO oder ABG die Hälfte eines rechten, also ist der Winkel BIO auch die Hälfte eines rechten, daher ist IBO = BIO, folglich BO = IO, und da IO = IP war, so ist auch BO = IP. Ferner ist OE = PC, (nach dem Erwiesenen,) und der Winkel CPB oder CPK ein rechter, (nach dem Erwiesenen,) auch KCP ein halber rechter, also ist auch CKP ein halber rechter, und daher (im Dreieck CPK) PC = PK. Da nun OE = PC war, so ist auch OE = PK. Ferner sind bei O und P rechte Winkel, (nach dem Erwiesenen,) also sind die beiden rechtwinklichen Dreiecke OBE und PIK congruent, (weil nemlich BO = IP, und OE = PK war,) folglich ist BE = IK.

Endlich ist das Dreieck DIE mit dem Dreieck ILK congruent. Denn es ist NO = CP und OE = CP, (nach dem Erwiesenen,) also ist NO = OE. Es war aber auch NO = OG (nach dem Erwiesenen,) folglich ist OE = OG. Ferner war BO = IO, also ist BO — OG = IO — OE, nemlich BG = EI. Es ist aber BG = BK = KL, also ist EI = KL. Es war aber auch BE = IK, und da BE = DE ist, so ist DE = IK. Ferner ist AM = AI und

AB = AL, (nach der Construction,) also ist AM — AB = AI — AL, oder BM = IL, nun war, nach dem Erwiesenen, BM = DI, also ist DI = IL. Folglich ist das Dreieck DIE congruent mit dem Dreieck ILK, weil nemlich EI = KL, DE = IK und DI = IL ist. Nach dem bisher Erwiesenen ist also

1) das Dreieck BMN congruent mit dem Dreieck ICD,
2) das Dreieck NOB congruent mit dem Dreieck CPB,
3) das Dreieck OBE congruent mit dem Dreieck PIK,
4) das Dreieck DIE congruent mit dem Dreieck ILK.

Folglich ist: Dreieck BMN + Dreieck NOB + Dreieck OBE + Dreieck DIE = Dreieck ICD + Dreieck CPB + Dreieck PIK + Dreieck ILK.

Nun ist aber das Quadrat ABFG der Kathete AB = dem Dreieck BKL, und das Quadrat ACHI der Kathete AC = dem Dreieck INM.

Aber das Dreieck INM + Dreieck DIQ ist = Dreieck BMN + Dreieck NOB + Dreieck OBE + Dreieck DIE + Dreieck BEQ,

also ist Quadrat ACHI + Quadrat ABFG + Dreieck DIQ = Dreieck BMN + Dreieck NOB + Dreieck OBE + Dreieck DIE + Dreieck BEQ + Dreieck BKL.

Nun ist ferner das Quadrat BCDE der Hypotenuse BC + Dreieck DIQ = Dreieck ICD + Dreieck CPB + Dreieck PIK + Dreieck ILK + Dreieck BEQ + Dreieck BKL.

Also ist das Quadrat BCDE + Dreieck DIQ = Quadrat ACHI + Quadrat ABFG + Dreieck DIQ.

Folglich ist das Quadrat BCDE der Hypotenuse BC (wenn man auf beiden Seiten der Gleichung das Dreieck DIQ wegnimmt,) der Summe der beiden Kathetenquadrate ACHI und ABFG gleich.

Anmerkung.

Diese verwickelte Construction, verbunden mit dem erforderlichen weitläufigen Beweis, ist eine Erfindung des Franz van Schooten, der sie im ersten Buch seiner exercit. math Seite 40, bekannt machte. Stöber hat sie auch in seine Dissertation aufgenommen, sie findet sich daselbst Seite 21. Van Schooten war ein Freund solcher verwickelter Constructionen, dergleichen man einige in dem Anhang des zweiten Buchs der exercit. math. nachsehen kann, welche dazu dienen, mehrere Aufgaben der praktischen Geometrie blos mit Meßkette und Absteckstäben aufzulösen. Besonders ist seine Auflösung der Aufgabe: die Länge einer unzugänglichen geraden Linie, deren beide Endpunkte an dem nemlichen Standpunkt nicht zugleich gesehen werden können, sondern der eine Endpunkt A nur in den Standpunkten C und D, und ihr anderer Endpunkt B nur in den Standpunkten E und F, merkwürdig. Bisher habe ich diejenigen Constructionen zusammengestellt, in welchen blos die beiden Kathetenquadrate, als Quadrate beschrieben werden, von dem Viereck aber auf der Hypotenuse erst bewiesen werden muß, daß es ein Quadrat ist. Ich gehe nun zu den Constructionen über, bei welchen die drei Quadrate der drei Seiten des gegebenen rechtwinklichen Dreiecks beschrieben werden.

Eilfte Art des Beweises.

Lehrsatz. (Fig. 15.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse der Summe der beiden Kathetenquatrate gleich.

Beweis.

Es sei ABC das rechtwinkliche Dreieck, und BAC der rechte Winkel, so wird behauptet, daß das Quadrat

der BC gleich ist den Quadraten der AB und AC. Man beschreibe nemlich auf BC das Quadrat BCED, auf AB das Quadrat ABFG und auf AC das Quadrat ACKH, und ziehe aus dem Punkt A mit BD oder CE die AL parallel, ferner ziehe man AD und CF. Weil nun jeder der beiden Winkel BAC und BAG ein rechter ist, also zwei gerade Linien AC und AG, die nicht nach einerlei Gegend liegen, die Winkel an der geraden AB bei dem Punkt A zweien rechten gleich machen, so ist AC mit AG in einer geraden Linie. Eben so ist auch AB mit AH in einer geraden Linie. Ferner ist der Winkel CBD dem Winkel ABF gleich, weil jeder ein rechter ist. Sezt man den gemeinschäftlichen ABC hinzu, so ist der ganze Winkel ABD dem ganzen CBF gleich, und da die zwei Seiten DB und BA den zwei Seiten BC und BF, jede der entsprechenden, gleich sind, und die Winkel ABD und CBF gleich sind, so ist auch die Grundlinie AD der Grundlinie CF gleich, und das Dreieck ABD ist dem Dreieck CBF gleich. Nun ist des Dreiecks ABD Doppeltes das Parallelogramm BDLM, denn sie haben einerlei Grundlinie BD und sind zwischen den nemlichen Parallelen BD und AL. Des Dreiecks CBF Doppeltes aber ist das Quadrat ABFG, denn sie haben gleichfalls einerlei Grundlinie BF, und sind zwischen den nemlichen Parallelen BF und CG. Das Doppelte von gleichen Größen ist auch einander gleich, also ist das Parallelogramm BDLM dem Quadrat ABFG gleich. Wenn man nun AE und BK zieht, so kann eben so gezeigt werden, daß das Parallelogramm CMLE dem Quadrat ACKH gleich ist. Folglich ist das ganze Quadrat BCED den beiden Quadraten ABFG und ACKH gleich. Das Quadrat BCED ist aber das auf BC beschriebene, und die Quadrate ABFG und ACKH die auf AB und AC beschriebe-

nen. Folglich ist das Quadrat der Hypotenuse den beiden Quadraten der Katheten gleich.

Anmerkung.

Die Erfindung dieses Beweises wird dem Pythagoras zugeschrieben. Euklid hat ihn, wie bekannt, in seinen Elementen vorgetragen, und diesen habe ich hier fast wörtlich übersetzt. Er ist der des 47sten Satzes, im ersten Buch der Elemente. Ausserdem findet man ihn auch fast in allen Lehrbüchern der Geometrie, nur mit in etwas abgeänderter Form des Vortrags. Lorenz hat ihn in seiner Übersetzung der Elemente sehr in das Kurze gezogen. Fast eben so hat ihn Stöber in seiner Dissertation behandelt.

Zwölfte Art des Beweises.

Lehrsatz. (Fig. 16.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck ABC ist das Quadrat der Hypotenuse BC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Beweis.

Man beschreibe auf der Kathete AB das Quadrat ABFG, auf der Kathete AC das Quadrat ACHI, und auf der Hypotenuse BC das Quadrat BCDE, ziehe durch den Punkt A die Linie LM mit BC parallel, verlängere HC bis V, durch den Punkt V ziehe man LV mit der Kathete AC parallel, ferner durch den Punkt Q die Linie QT auch mit AC parallel, und durch den Durchschnittspunkt S die Linie XY parallel mit der Kathete BA. Endlich verlängere man IH über H hinaus, die Hypotenuse BC nach Q und P, bis sie LV und die verlängerte IH schneidet, und GF bis N, so wie DE und AB bis U.

Nun ist das Parallelogramm ACPM dem Quadrat ACHI gleich, weil es mit demselben auf einerlei Grundlinie AC, und zwischen den nemlichen Parallelen AC und IP steht.

Ferner ist das Parallelogramm ABNQ dem Quadrat ABFG gleich, weil es mit demselben auf einerlei Grundlinie AB und zwischen den nemlichen Parallelen AB und GN steht.

Es ist aber das Parallelogramm AQSC dem Parallelogramm ABNQ gleich, mit dem es auf einerlei Grundlinie AQ und zwischen den nemlichen Parallelen AQ und CN steht, also ist das Parallelogramm AQSC auch dem Quadrat ABFG gleich.

Folglich ist Parallelogramm ACPM + Parallelogramm AQSC = Quadrat ACHI + Quadrat ABFG. Aber die beiden Parallelogramme ACPM und AQSC machen das Parallelogramm QSPM aus, daher ist das Parallelogramm QSPM der Summe der beiden Kathetenquadrate ACHI und ABFG gleich.

Ferner ist das Parallelogramm BCVU dem Quadrat BCDE gleich, weil es mit demselben auf einerlei Grundlinie BC und zwischen den nemlichen Parallelen BC und DU steht. Aber das Parallelogramm CVKA ist dem Parallelogramm BCVU gleich, mit dem es auf einerlei Grundlinie CV und zwischen den nemlichen Parallelen CV und AU steht, also ist auch das Parallelogramm CVKA dem Quadrat BCDE gleich. Da nun das Parallelogramm ACOL dem Parallelogramm CVKA gleich ist, mit dem es auf einerlei Grundlinie AC und zwischen den nemlichen Parallelen AC und LV steht, so ist auch das Parallelogramm ACOL dem Quadrat BCDE der Hypotenuse gleich. Da aber in den zwei rechtwinklichen congruenten Dreiecken

CHP und SXO die Seiten SX und CH gleich sind, so ist auch CP = SO, und daher das Parallelogramm OSQL dem Parallelogramm ACPM gleich. Folglich ist, wenn man zu diesen beiden Parallelogrammen das Parallelogramm AQSC hinzusetzt, das Parallelogramm ACOL dem Parallelogramm QSPM gleich, das heißt: das Quadrat BCDE der Hypotenuse ist dem Parallelogramm QSPM oder der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Zusatz.

Daß in den beiden Dreiecken OXS und CHP die Seiten SX und CH gleich sind, hat Stöber nicht bewiesen, es läßt sich aber so zeigen. In den rechtwinklichen Dreiecken CDV und ABC sind die Winkel VCD und ACB gleich, also sind sie ähnlich, und es verhält sich AC : AB = CD (oder BC) : DV. Ferner, da ZS mit AB parallel ist, so verhält sich AC : CZ = BC : CS. Es ist aber AC = QS und AZ = RS, also CZ = QR, und da QR = BF = AB, so ist auch CZ = AB. Also verhält sich AC : AB = BC : CS, daher ist DV = CS. Wenn man nun durch S und V die SV zieht, so ist sie folglich 1) mit CD parallel, 2) der CD gleich und daher auch der BC, 3) auf BC und DE senkrecht, also ist, da CVD = ABC, der Winkel SVC = ACB, folglich ist das bei T rechtwinkliche Dreieck SVT mit dem rechtwinklichen Dreieck ABC congruent, daher VT = AC = CH, und da SX = VT, so ist auch SX = CH.

Erste Anmerkung.

Diese Beweisart beruht also zum Theil auf Proportionen. Indem ich nun den Beweis zu finden suchte, daß SX = VT sei, kam ich auf folgenden leichten Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes, der sich auf den Satz gründet,

(Fig. 23.) in jedem rechtwinklichen Dreieck ABC verhält sich BC + AB : AC = AC : BC — AB, d. i. (wenn man aus B mit BA einen Kreis beschreibt,) KC : AC = AC : CN. Denn wenn man KA und AN zieht, so ist KAN ein rechter Winkel, aber auch BAC, also ist KAB = NAC, und da KAB = AKB, (weil BK = BA) so ist NAC = AKC, und da überdieß in den Dreiecken KAC und CNA der Winkel C gemeinschäftlich ist, so verhält sich KC : AC = AC : CN, d. i. BC + AB : AC = AC : BC — AB. Folglich ist ACq = (BC + AB) (BC — AB), d. i. ACq = BCq — ABq, und daher ACq + ABq = BCq.

Anfänger können zur Übung versuchen den Satz: daß BCq — ABq = (BC + AB) (BC — AB) ist, synthetisch zu erweisen. Das Verfahren habe ich in der letzten Beweisart, die zunächst den Sätzen vorangeht, welche die Erweiterung des pythag. Lehrsatzes enthalten, angegeben.

Zweite Anmerkung.

In Stöber's Dissertation findet sich diese Beweisart Seite 24, er hat sie, nach seiner Angabe, aus den Actis erud. 1682. pag. 27. entlehnt.

Dreizehnte Art des Beweises.

Lehrsatz. (Fig. 17.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse BC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Beweis.

Man beschreibe auf den beiden Katheten AB und AC ihre Quadrate ABFG und ACHI, und auf der Hypotenuse BC das Quadrat BCDE. Ferner ziehe man durch

den Punkt H die HO mit BC, durch den Punkt F die FN auch mit BC, durch den Punkt A die AK mit BE oder CD, und die EL mit BA parallel. Endlich ziehe man DL. Da AK mit BE parallel ist, so sind bei K rechte Winkel, und da EL mit BA parallel ist, so ist der äussere Winkel ELK dem innern gegenüberstehenden BAP gleich, auch ist BP = EK, (als gegenüberstehende Seiten des Rechtecks BPKE,) folglich ist das rechtwinkliche Dreieck EKL congruent mit dem rechtwinklichen Dreieck BPA, folglich ist KL = AP, und da auch KD = PC ist, so ist das rechtwinkliche Dreieck DKL congruent mit dem rechtwinklichen Dreieck CPA, folglich der Winkel DLK dem Winkel CAP gleich, daher DL parallel mit AC. Ferner, da bei A rechte Winkel sind, so ist AI mit BA und AC mit GA in einer geraden Linie. Nun ist das Parallelogramm CHOB dem Quadrat ACHI gleich, da es mit demselben auf einerlei Grundlinie CH und zwischen den nemlichen Parallelen CH und BI steht. Das Parallelogramm DCAL ist aber mit dem Parallelogramm CHOB congruent, denn es ist DC = BC, der Winkel DCA = dem Winkel BCH, (weil jeder aus dem rechten eines Quadrats und dem Winkel ACB besteht,) und CA = CH, daher sind diese beiden Parallelogramme congruent, weil zwei anliegende Seiten und der von ihnen gebildete Winkel des einen Parallelogramms zweien anliegenden Seiten nebst dem von ihnen gebildeten Winkel des andern Parallelogramms gleich sind. Also ist das Parallelogramm DCAL dem Quadrat ACHI gleich. Es ist aber das Rechteck DCPK dem Parallelogramm DCAL gleich, weil es mit ihm auf einerlei Grundlinie CD und zwischen den nemlichen Parallelen CD und AK steht, also ist das Rechteck DCPK dem Quadrat ACHI der Kathete AC gleich.

Ferner ist das Parallelogramm BFNC dem Quadrat BFGA gleich, da es mit ihm auf einerlei Grundlinie BF und zwischen den nemlichen Parallelen BF und CG steht. Aber das Parallelogramm ABEL ist mit dem Parallelogramm BFNC congruent, (denn es ist BE = BC, BA = BF, und der Winkel ABE = dem Winkel CBF,) daher ist das Parallelogramm ABEL auch dem Quadrat ABFG gleich. Nun ist das Rechteck BEKP dem Parallelogramm ABEL gleich, weil es mit ihm auf einerlei Grundlinie BE und zwischen den nemlichen Parallelen BE und AK steht, also ist das Rechteck BEKP dem Quadrat ABFG der Kathete AB gleich.

Die beiden Rechtecke DCPK und BEKP machen aber zusammen das Quadrat BCDE aus, also ist das Quadrat BCDE der Summe der beiden Quadrate ACHI und ABFG der Katheten AC und AB gleich.

Anmerkung.

Diese Beweisart trägt Stöber in seiner Dissertation Seite 23 vor, er hat aber nicht angegeben, woher er sie entlehnt hat.

Vierzehnte Art des Beweises.

Lehrsatz. (Fig. 18.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck BAC ist das Quadrat der Hypotenuse BC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Beweis.

Man beschreibe auf der Kathete AB das Quadrat ABFG, und auf der Kathete AC das Quadrat ACHI,

so ist, weil bei A rechte Winkel sind, AG mit AC und AB mit AI in einer geraden Linie. Ferner beschreibe man auf der Hypotenuse BC das Quadrat BCDE, verlängere FG und HI bis sie sich im Punkt K schneiden, verlängere auch EB bis L und DC bis M, und ziehe durch die Winkelpunkte A und K die Linie KN.

Es ist CH = AC, und da BCM ein rechter Winkel, ACH auch ein rechter Winkel ist, so ist BCM = ACH, folglich ACH — ACM = BCM — ACM, nemlich HCM ACB, daher sind die beiden rechtwinklichen Dreiecke CHM und BAC congruent. Ferner ist GK = AI = AC und AG = AB, also sind die beiden rechtwinklichen Dreiecke AGK und BAC congruent. Auch ist in dem Rechteck AGKI, welches durch die Diagonale AK halbirt wird, das rechtwinkliche Dreieck AIK mit dem rechtwinklichen Dreieck AGK congruent. Endlich ist BF = AB, CBL ein rechter Winkel, und ABF gleichfalls, also ist ABF = CBL, folglich ABF — ABL = CBL — ABL, nemlich FBL = ABC, daher sind die beiden rechtwinklichen Dreiecke BFL und BAC congruent. Es sind also die fünf Dreiecke BAC, MHC, AGK, AIK und BFL congruent, folglich ist der Winkel AKG im Dreieck AGK dem Winkel BLF im Dreieck BFL gleich, und da BLF der äussere und AKG der ihm gegenüberstehende innere Winkel ist, so ist KN mit LE parallel. Auch ist, wegen der Congruenz der genannten Dreiecke, BL = BC = BE = CM = CD. Nun ist das Parallelogramm ABLK dem Quadrat ABFG gleich, denn es steht mit ihm auf einerlei Grundlinie AB, und zwischen den nemlichen Parallelen AB und KF, ferner das Parallelogramm BENO, dem Parallelogramm ABLK gleich, denn beide haben gleiche Grundlinien BE und BL, und sind zwischen den nemlichen Parallelen LE und KN ent-

halten. Folglich ist das Parallelogramm BENO dem Quadrat ABFG gleich.

Ferner ist das Parallelogramm ACMK dem Quadrat ACHI gleich, mit dem es auf einerlei Grundlinie AC und zwischen den nemlichen Parallelen CA und HK steht. Das Parallelogramm CDNO ist aber dem Parallelogramm ACMK gleich, denn beide haben gleiche Grundlinien CD und CM, und stehen zwischen den nemlichen Parallelen MD und KN, also ist das Parallelogramm CDNO auch dem Quadrat ACHI gleich.

Es machen aber die beiden Parallelogramme BENO und CDNO das Quadrat der Hypotenuse BC aus, also ist dieses Quadrat der Summe der beiden Kathetenquadrate ABFG und ACHI gleich.

Anmerkung.

Diese einfache und elegante Construction hat Stöber in seiner Dissertation, Seite 23, aufgeführt, giebt aber, wie bei der vorigen, nicht an, wer der Erfinder war, oder in welchem Buch sie steht.

Funfzehnte Art des Beweises.

Lehrsatz. (Fig. 19.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck BAC ist das Quadrat der Hypotenuse BC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Beweis.

Man beschreibe auf der Kathete AB das Quadrat ABFG, auf der Kathete AC das Quadrat ACHI, und auf der Hypotenuse BC das Quadrat BCDE. Hierauf

beschreibe man auf der Seite DE des Quadrats der Hypotenuse ein Dreieck DKE, so daß DK = AB und EK = AC ist, so ist dieses Dreieck DKE mit dem Dreieck BAC congruent. Endlich ziehe man AK, FH und GI, so ist das Dreieck GAI auch mit dem Dreieck BAC congruent, denn da BAG und BAC rechte Winkel sind, so ist AG mit AC in einer geraden Linie, und da BAC und CAI rechte Winkel sind, so liegt AI mit AB in einer geraden Linie, also sind die Scheitelwinkel BAC und GAI gleich, überdieß AG = AB und AI = AC, folglich ist das Dreieck GAI mit dem Dreieck BAC congruent, daher sind die drei rechtwinklichen Dreiecke GAI, BAC und DKE congruent. Nun vergleiche man das Viereck ABEK mit dem Viereck FBCH, so ist BF = AB, BC = BE, CH = EK, (weil CH = AC und EK = AC ist,) auch ist der Winkel FBC = dem Winkel ABE, (weil x = y, als rechte Winkel, folglich x + ABC oder FBC = y + ABC oder = ABE,) und der Winkel BCH = dem Winkel BEK, (weil z = w, als rechte Winkel, und der Winkel DEK = dem Winkel ACB, folglich z + ACB oder BCH = w + DEK oder = BEK ist,) also ist das Viereck ABEK congruent mit dem Viereck FBCH.

Ferner vergleiche man das Viereck ACDK mit dem Viereck FGIH, so ist AC = HI, CD = GI, (weil CD = BC und GI = BC ist,) und DK = FG, (weil DK = AB und FG = AB ist,) auch ist der Winkel ACD = dem Winkel HIG, (weil jeder aus einem rechten und aus einem dem andern gleichen Winkel besteht, da nemlich ACB = AIG ist,) eben so, der Winkel CDK = dem Winkel FGI, folglich sind die beiden Vierecke ACDK und FGIH congruent.

Nun besteht die sechsseitige Figur ABEKDC aus den beiden Vierecken ABEK und ACDK, ferner die sechsseitige Figur BFGIHC aus den beiden Vierecken FBCH und FGIH, also ist die sechsseitige Figur ABEKDC der sechsseitigen Figur BFGIHC gleich.

Aber die sechsseitige Figur ABEKDC besteht aus dem Quadrat BCDE und den beiden Dreiecken BAC und DKE, ferner die sechsseitige Figur BFGIHC aus den zwei Quadraten ABFG und ACHI nebst den beiden Dreiecken BAC und GAI, also ist

Quadrat BCDE + Dreieck BAC + Dreieck DKE = Quadrat ABFG + Quadrat ACHI + Dreieck BAC + Dreieck GAI.

Wenn man nun das gemeinschäftliche Dreieck BAC nebst den congruenten Dreiecken DKE und GAI als gleiche Summen von dem Gleichen wegnimmt, so ist das Quadrat BCDE der Hypotenuse BC = dem Quadrat ABFG + Quadrat ACHI der beiden Katheten AB und AC.

Anmerkung.

Diese Construction kenne ich erst seit einigen Jahren, da sie mir mündlich mitgetheilt wurde. Nun folgen noch diejenigen Beweisarten, die sich auf die Proportionalität der Linien und auf die Ähnlichkeit der Dreiecke gründen.

Sechzehnte Art des Beweises.

Lehrsatz. (Fig. 20.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck BAC ist das Quadrat der Hypotenuse BC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Be-

Beweis.

Man ziehe aus der Spitze A des rechten Winkels auf die Hypotenuse BC des gegebenen rechtwinklichen Dreiecks BAC die senkrechte Linie AD, so sind die beiden rechtwinklichen Dreiecke ADB und ADC dem rechtwinklichen Dreieck BAC ähnlich, weil jedes von ihnen einen Winkel mit dem Dreieck BAC gemeinschäftlich hat. Also verhält sich:

BD : AB = AB : BC

und CD : AC = AC : BC

Aus der ersten Proportion folgt, daß das Quadrat der Kathete AB einem Rechteck gleich ist, dessen anliegende Seiten BD und BC sind, (Euklid, 6. Buch, 17. Satz,) und aus der zweiten Proportion folgt, daß das Quadrat der Kathete AC einem Rechteck gleich ist, dessen anliegende Seiten CD und BC sind. (Euklid, 6. Buch, 17. Satz.)

Diese beiden genannten Rechtecke machen aber das Quadrat der Hypotenuse BC aus, weil die unter der ganzen Linie BC und jedem der beiden Abschnitte BD und CD enthaltenen Rechtecke dem Quadrat der ganzen Linie BC gleich sind. (Euklid, 2. Buch, 2. Satz.)

Also sind die beiden Quadrate der Katheten AB und AC dem Quadrat der Hypotenuse BC gleich.

Anmerkung.

Diese Beweisart ist schon sehr alt, und man findet sie in vielen mathematischen Lehrbüchern, auch in Stöber's Dissertation. Sie ist nemlich eigentlich blos der Zusatz des achten Satzes im sechsten Buch der Elemente des Euklid's, verbunden mit dem siebzehnten Satz dieses Buchs.

Siebzehnte Art des Beweises.

Lehnsatz. (Fig. 21.)

Wenn eine Sehne AC mit einer Tangente BC am Berührungspunkt C einen Winkel ACB bildet, so ist dieser Winkel dem Peripheriewinkel AFC, der in dem entgegengesetzten Abschnitt ist, und auf dem Bogen AC der Sehne steht, gleich.

Beweis.

Man ziehe vom Berührungspunkt C aus, den Durchmesser CG, und die Sehne AG, so ist der Peripheriewinkel AGC dem Peripheriewinkel AFC, mit welchem er auf dem nemlichen Bogen AC steht, gleich. Nun ist der Peripheriewinkel CAG im Halbkreis ein rechter Winkel, also ist ACG + AGC auch einem rechten gleich. Es ist aber der Winkel BCG, den die Tangente BC im Berührungspunkt C mit dem Halbmesser CD macht, auch ein rechter, folglich ist ACG + AGC = BCG. Der Winkel BCG besteht nun aus den Winkeln ACG nnd ACB, folglich ist ACG + AGC = ACG + ACB, und daher AGC = ACB. Da aber AFC = AGC ist, so ist auch AFC = ACB.

Lehnsatz (Fig. 21.)

Die Tangente CE ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der Secante HE und ihrem ausser dem Kreis liegenden Theil EI.

Beweis.

Man ziehe die Sehnen HC und CI, so ist der Winkel ICE dem Peripheriewinkel CHI oder y gleich, (voriger

Lehnsatz,) ferner ist der Winkel E den beiden Dreiecken CEH und CEI gemeinschäftlich, also sind diese beiden Dreiecke ähnlich, daher verhält sich HE : CE = CE : EI.

Zusatz.

Folglich ist das Quadrat der Tangente CE gleich einem Rechteck, dessen anliegende Seiten die Secante HE und ihr ausser dem Kreis befindlicher Theil EI ist. (Euklid, 6. B., 17. Satz.)

Lehrsatz. (Fig. 22.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck BAC ist das Quadrat der Hypotenuse BC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Beweis.

Man beschreibe das Quadrat BCDE der Hypotenuse BC, das Quadrat ABFG der Kathete AB und das Quadrat ACHI der Kathete AC. Ferner aus einem Endpunkt, z. B. B, der Hypotenuse, als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser, welcher der an diesem Endpunkt liegenden Kathete, z. B. BA gleich ist, einen Kreis ANKFA. Hierauf verlängere man die Hypotenuse CB bis K, ziehe durch den Punkt N die Linie NP so wie auch durch den Punkt K die Linie KL, beide parallel mit CD oder BE, mache CM = CN und KL = CN, und ziehe LM, so ist LM parallel mit KC, (weil KL und CM gleich und parallel sind,) folglich ist das Viereck CKLM ein Rechteck, dessen anliegende Seiten CK und CM, oder CK und CN sind. Ferner ist DM = EQ = BN = AB = BK. Nun ist die Kathete AC eine Tangente des Kreises ANKFA und KC eine Secante desselben. Folglich ist das Quadrat ACHI der Tangente oder Kathete AC dem Rechteck CKLM gleich, dessen eine anlie-

gende Seite die Secante KC und die andere anliegende Seite CM dem ausserhalb des Kreises befindlichen Theil NC der Secante gleich ist. (Voriger Lehnsatz.) Es ist aber das Quadrat EPOQ dem Quadrat ABFG gleich, (weil EP = BN = AB = EQ ist,) also ist Quadrat ACHI + Quadrat ABFG = Rechteck CKLM + Quadrat EPOQ. Ferner ist, (da DP = CN = KL und DM = BK) das Rechteck DPOM dem Rechteck BQLK gleich, also ist der Gnomon BCDPOQ dem Rechteck CKLM gleich. Folglich ist Quadrat ACHI + Quadrat ABFG = dem Gnomon BCDPOQ + Quadrat EPOQ. Nun macht dieser Gnomon nebst dem Quadrat EPOQ das Quadrat BCDE aus, also ist Quadrat ACHI der Kathete AC + Quadrat ABFG der Kathete AB = dem Quadrat BCDE der Hypotenuse BC.

Anmerkung.

Diese Beweisart hat Stöber in seiner Dissertation als seine eigene Erfindung vorgetragen. Er erinnert dabei mit Recht, daß der Satz: das Quadrat der Tangente ist dem Rechteck aus der Secante und ihrem ausserhalb des Kreises befindlichen Theil gleich, vermittelst des pythagoräischen Lehrsatzes erwiesen werden kann, wie von Euklid im 36. Satz des dritten Buchs der Elemente gezeigt worden ist, daß man aber auch diesen Satz unabhängig von dem pythagoräischen Lehrsatz, vermittelst der Ähnlichkeit der Dreiecke und der Proportionalität der Linien demonstriren kann, wie schon Wolf gethan hat, und für welches Verfahren ich die zwei nöthigen Sätze als Lehnsätze vorausgehen ließ. Hierauf wendet man den 17ten Satz des sechsten Buchs der Elemente an, dessen Beweis gleichfalls vom pythagoräischen Lehrsatz unabhängig ist, und den ich als Zusatz vorgetragen habe, so kann man alsdann, wie Stöber gethan hat, umgekehrt den pythagoräischen Lehrsatz vermittelst des Lehrsatzes von der Gleichheit des Quadrats der Tangente mit dem erwähnten Rechteck, beweisen.

Achtzehnte und letzte Art des Beweises.

Lehrsatz. (Fig. 23.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck BAC ist das Quadrat der Hypotenuse BC der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich.

Beweis.

Man beschreibe aus dem Punkt C mit der Hypotenuse BC als Halbmesser einen Kreis und verlängere AC bis zu den Punkten D und E der Peripherie, so sind CD und CE Halbmesser des Kreises, also CD = CE = BC. Da nun AB auf dem Durchmesser DE senkrecht ist, so verhält sich AD : AB = AB : AE, (Euklid, 6. Buch, 13. Satz,) oder CD — AC : AB = AB : CE + AC, und da CE = CD ist, so verhält sich auch CD — AC : AB = AB : CD + AC, also ist das Rechteck, dessen anliegende Seiten CD — AC und CD + AC sind, dem Quadrat der AB gleich. (Euklid, 6. Buch, 17. Satz.) Nun sey AB in der vierten Figur, = CD in der 23. Figur, BC in der 4ten Fig., = AD oder = CD — AC in der 23. Figur, also AC = AC, so ist, (wie oben erwiesen wurde, und auch nach Euklids 2. B., 4. Satz,) in der 4. Figur, $AB^q = AC^q + BC^q + 2AC \cdot CB$, d. i. im jetzigen Fall $CD^q = AC^q + (CD - AC)^q + 2AC \cdot (CD - AC)$. Es ist aber $(CD - AC)^q + 2AC(CD - AC) = (CD - AC)(CD + AC)$ d. h. = dem Rechteck, dessen anliegende Seiten CD + AC und CD — AC sind. Denn die eine Seite desselben, nemlich CD + AC ist = (CD — AC) + 2AC, und die andere anliegende Seite ist = CD — AC, daher besteht dieses Rechteck aus dem Quadrat der Linie CD — AC

und aus zwei Rechtecken, deren anliegende Seiten CD — AC und AC sind, wie man auch durch eine leichte Construction zeigen kann, also ist CDq oder BCq = ACq + (CD — AC) (CD + AC). Aber das Rechteck (CD — AC) (CD + AC) ist, wie vorhin gezeigt wurde, dem Quadrat der senkrechten AB gleich, also ist BCq = ACq + ABq.

Anmerkung.

Diese synthetische Beweisart habe ich noch nirgends gefunden, übrigens geht der Satz selbst sehr leicht aus folgendem analytischen Verfahren hervor. Wenn man nemlich die Gleichung für rechtwinkliche Coordinaten eines Kreises, in welchem die Abscissen x von dem einen Endpunkt des Durchmessers 2r gezählt werden, und welche, wie bekannt, $y^2 = 2rx - x^2$ ist, in eine andere Gleichung für rechtwinkliche Coordinaten des Kreises, da die Abscissen u vom Mittelpunkt an gezählt werden, also $x = r - u$ ist, verwandelt, denn da findet man $y^2 = 2r(r - u) - (r - u)^2$ und nach gehöriger Reduction $y^2 = r^2 - u^2$ und daher $y^2 + u^2 = r^2$ oder ABq + ACq = BCq.

III.

Erweiterungen des pythagoräischen Lehrsatzes.

Erste Erweiterung des pythagoräischen Lehrsatzes.

Lehrsatz. (Fig. 20.)

In jedem rechtwinklichen Dreieck BAC ist die auf der Hypotenuse BC beschriebene Figur F, den ihr ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren D und E der Katheten AC und AB, zusammen gleich, oder F ist = D + E.

Beweis.

Da die Figuren D, E und F ähnlich sind, so verhalten sie sich wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten, oder überhaupt wie die Quadrate der in ihnen auf ähnliche Art gezogenen geraden Linien.

Also verhält sich, (wenn das Quadrat der Linie AC, oder das Quadrat, dessen Seite = AC ist, mit Q. AC u. s. f. bezeichnet wird,)

$$D : F = Q.\,AC : Q.\,BC$$
$$\text{und } F : E = Q.\,BC : Q.\,AB$$

folglich ex aequo $D : E = Q.\,AC : Q.\,AB$

und componendo $(D + E) : E = (Q.\,AC + Q.\,AB) : Q.\,AB$

Da aber $F : E = Q.\,BC : Q.\,AB$

so verhält sich
invertendo $E : F = Q. AB : Q. BC$

daher ex aequo $(D + E) : F = (Q. AC + Q. AB) : Q. BC$
Es ist aber $Q. AC + Q. AB = Q. BC$
also ist auch $D + E = F$.

Anmerkung.

Dieser Satz findet sich schon in Euklid's Elementen, und zwar ist er der 31ste des sechsten Buchs.

Zweite Erweiterung des pythagoräischen Lehrsatzes.

Lehrsatz. (Fig. 24.)

In jedem stumpfwinklichen Dreieck CAB ist das Quadrat der dem stumpfen Winkel A gegenüberliegenden Seite BC der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten AC und AB, welche den stumpfen Winkel bilden, nebst demjenigen doppelten Rechteck gleich, dessen eine Seite AC diejenige Seite des Dreiecks CAB ist, auf deren Verlängerung die senkrechte BD gezogen worden, und die andere anliegende Seite AD das zwischen dieser senkrechten Linie und der Spitze des stumpfen Winkels liegende Stück der gedachten Verlängerung der Seite CA, ist.

Beweis.

Man betrachte CD als eine gerade Linie, die in einem beliebigen Punkt A in zwei Theile CA und AD getheilt ist, so ist das Quadrat der CD = dem Quadrat des Theils CA + Quadrat des Theils AD + dem Doppelten eines Rechtecks, dessen anliegende Seiten die Theile CA und AD sind. Folglich ist, wenn man das Quadrat der

senkrechten BD hinzusetzt, Q. der CD + Q. der BD = Q. der CA + Q. der AD + Q. der BD + dem doppelten Rechteck aus CA und AD. Nun ist bei D ein rechter Winkel, also im rechtwinklichen Dreieck BDC, Q. der CD + Q. der BD = Q. der BC, und im rechtwinklichen Dreieck ADB, Q. der AD + Q. der BD = Q. der AB. Folglich ist Q. der BC = Q. der CA + Q. der AB + dem doppelten Rechteck aus CA und AD.

Anmerkung.

Diesen Beweis hat schon Euklid im 12. Satz des zweiten Buchs der Elemente vorgetragen. Vermittelst der Buchstabenrechnung läßt er sich so geben. Es sei BC = a, AC = b, AB = c, AD = d und die senkrechte BD = p. Nun ist $p^2 = c^2 - d^2$ und $a^2 = (b + d)^2 + p^2$, folglich ist $a^2 = (b + d)^2 + c^2 - d^2$, oder $a^2 = b^2 + 2bd + d^2 + c^2 - d^2$, das ist; $a^2 = b^2 + 2bd + c^2$ oder $a^2 = b^2 + c^2 + 2bd$.

Dritte Erweiterung des pythagoräischen Lehrsatzes.

Lehrsatz. (Fig. 25.)

In jedem spitzwinklichen Dreieck BAC ist das Quadrat einer beliebigen Seite, (z. B. der Seite AC,) der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten AB und BC, weniger dem Doppelten eines Rechtecks gleich, dessen eine Seite BC diejenige Seite des Dreiecks BAC ist, auf welche die senkrechte AD gezogen worden, und die andere anliegende Seite BD derjenige Theil ist, der von der senkrechten abgeschnitten wird, und an dem Winkel liegt, welcher der Seite AC gegenübersteht.

Beweis.

Man betrachte BC als eine gerade Linie, die in einem beliebigen Punkt D in zwei Theile BD und CD getheilt ist, so ist das Quadrat der BC + Q. des Theils BD = Q. des Theils CD + dem doppelten Rechteck dessen anliegende Seiten BC und BD sind. (Siehe dritte Art des Beweises, Lehnsatz.) Folglich, wenn das Quadrat der senkrechten AD hinzugesetzt wird, ist Q. der BC + Q. der BD + Q. der AD = Q. der CD + Q. der AD + dem doppelten Rechteck aus BC und BD. Nun ist, da bei D rechte Winkel sind, in dem rechtwinklichen Dreieck ADB das Q. der BD + Q. der AD = Q. der AB, und in dem rechtwinklichen Dreieck ADC das Q. der CD + Q. der AD = Q. der AC. Also ist Q. der BC + Q. der AB = Q. der AC + dem doppelten Rechteck aus BC und BD. Folglich, wenn auf beiden Seiten der Gleichung dieses doppelte Rechteck weggenommen wird, Q. der BC + Q. der AB — dem doppelten Rechteck aus BC und BD = Q. der AC.

Anmerkung.

Diesen Beweis hat auch Euklid im 13ten Satz des zweiten Buchs der Elemente vorgetragen. Vermittelst der Buchstabenrechnung läßt er sich so darstellen. Es sei $AB = c$, $AC = a$, $BC = b$, $BD = d$, und die senkrechte $AD = p$, so ist $CD = b - d$, $p^2 = c^2 - d^2$, $a^2 = (b-d)^2 + p^2$ oder $= (b-d)^2 + c^2 - d^2$ oder $= b^2 - 2bd + d^2 + c^2 - d^2$, nemlich es ist $a^2 = b^2 + c^2 - 2bd$.

Vierte Erweiterung des pythagoräischen Lehrsatzes.

Lehrsatz. (Fig. 25.)

In jedem Dreieck, es sei spitzwinklich, rechtwinklich, oder stumpfwinklich, ist das Quadrat der einen von den beiden spitzigen Winkeln, (z. B. dem Winkel B) gegenüberliegenden Seite, (z. B. AC) der Summe der Quadrate der diesen spitzigen Winkeln bildenden Seiten, (z. B. der Seiten AB und BC) weniger dem Doppelten eines Rechtecks gleich, dessen eine Seite BC diejenige Seite des Dreiecks BAC ist, auf welcher von dem einen Endpunkt A der Seite AC die senkrechte AD gezogen worden, und die andere anliegende Seite der zwischen dieser senkrechten und dem der Seite AC gegenüberliegenden Winkelpunkt B befindliche Theil BD der Seite BC ist.

Beweis.

Es seien B und C die beiden spitzigen Winkel, der Winkel A mag ein spitziger, rechter oder stumpfer Winkel seyn, man ziehe die senkrechte Linie von dem Winkelpunkt A, auf die ihm gegenüberstehende Seite BC, so wird der Endpunkt D der senkrechten AD zwischen den Endpunkten B und C der Seite BC liegen. Der Beweis wird nun eben so geführt, wie in dem vorigen Lehrsatz.

Anmerkung.

Diese Beweisart ist von Lorenz in der zweiten Ausgabe seiner Übersetzung der Elemente Euklids, für den 13ten Satz, des zweiten Buchs, gebraucht worden. Schon Robert Simson in seiner Bearbeitung und Restitution der ersten sechs Bücher, so wie auch des eilften und zwölften Buchs der Elemente, hatte bei dem 13ten Satz des zweiten

Buchs erinnert, daß der griechische Text sich nur auf spitzwinkliche Dreiecke beschränkt, da dieser Satz doch für alle Dreiecke wahr ist, und giebt daher noch zwei besondere Beweise für die beiden Fälle, wenn die senkrechte Linie ausserhalb des gegebenen Dreiecks, und wenn sie in eine Seite desselben fällt. Diese beiden Beweise hat vor ihm auch Friedrich Commandinus in seiner lateinischen Übersetzung der Elemente gegeben. Lorenz hat die drei Beweise für die drei Fälle, (nemlich den des Euklid's, und die beiden des Robert Simson,) in einen einzigen dadurch zusammengezogen, daß er die senkrechte Linie, (wenn das Dreieck rechtwinklich oder stumpfwinklich ist,) von der Spitze des rechten oder stumpfen Winkels auf die solchem gegenüberstehende Seite zieht, so daß sie also allemal zwischen den spitzigen Winkeln liegt, und daher weder ausserhalb des Dreiecks noch in eine Seite desselben fallen kann. Auf diese Art hat auch schon Clavius, in seinem Commentar der Elemente, in der Anmerkung zu diesem 13ten Satz, den Beweis des Euklid's erweitert.

Fünfte Erweiterung des pythagoräischen Lehrsatzes.

Lehrsatz. (Fig. 26.)

In jedem Parallelogramm ABDC ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen AD und BC der Summe der vier Quadrate der vier Seiten des Parallelogramms gleich.

Beweis.

Man ziehe die zwei senkrechten Linien AE und BF. Nun sei AB = a, CD = b, BD = c, AC = d, CE = f und DF = g, so ist (im Dreieck CAD,) Q. AD = $b^2 + d^2 + 2bf$, ferner, (im Dreieck CBD,) Q. BC = b^2

$+ c^2 - 2bg$. Es ist aber CD = AB, als gegenüberstehende Seiten, folglich $b = a$, und $b^2 = a^2$. Auch sind die beiden Dreiecke AEC und BFD congruent, denn die Winkel bei E und F sind rechte Winkel, der äussere Winkel ACE ist dem innern gegenüberstehenden BDF gleich, und AC ist = BD als gegenüberstehende Seiten des Parallelogramms, also ist CE = DF, oder $f = g$, folglich Q. BC $= a^2 + c^2 - 2bf$. Daher ist Q. AD + Q. BC $= b^2 + d^2 + 2bf + a^2 + c^2 - 2bf$, oder Q. AD + Q. BC $= b^2 + d^2 + a^2 + c^2$.

Zusatz.

Da $b = a$ und $c = d$, also $b^2 = a^2$ und $c^2 = d^2$ ist, so ist auch Q. AD + Q. BC $= 2a^2 + 2c^2$, oder $= 2(a^2 + c^2)$ das heißt: in jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen, der doppelten Summe der Quadrate der beiden anliegenden Seiten des Parallelogramms gleich. Da ferner Q. AD = 4 Q. ($\frac{1}{2}$AD) und Q. BC = 4 Q. ($\frac{1}{2}$BC) ist, so ist auch $2(a^2 + c^2)$ = 4 Q. ($\frac{1}{2}$AD) + 4 Q. ($\frac{1}{2}$BC) oder $a^2 + c^2$ = 2 Q. ($\frac{1}{2}$AD) + 2 Q. ($\frac{1}{2}$BC), welches der nun folgende Satz ist.

Anmerkung.

Diesen Lehrsatz hat Bärmann in seiner lateinischen Übersetzung der Elemente als Scholion dem 13ten Satz des zweiten Buchs beigefügt.

Sechste Erweiterung des pythagoräischen Lehrsatzes.

Lehrsatz. (Fig. 27. und 28.)

In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate zweier Seiten AB und AC das Doppelte der Summe des Qua-

drats der Hälfte der dritten Seite BC und des Quadrats der geraden Linie AD, welche von der Spitze A zu dem Halbirungspunkt D gezogen ist.

Beweis.

Man ziehe aus dem Punkt A auf BC oder deren Verlängerung die senkrechte AE. Erster Fall. Wenn der Endpunkt E der senkrechten AE zwischen C und D liegt. Es ist $Q.\,BE + Q.\,EC = 2\,(Q.\,BD + Q.\,DE)$ nach dem 9ten Satz des zweiten Buchs der Elemente, auch ist (im rechtwinklichen Dreieck AED) $2\,Q.\,AE + 2\,Q.\,DE = 2\,Q.\,AD$, folglich ist $Q.\,BE + Q.\,EC + 2\,Q.\,AE + 2\,Q.\,DE = 2\,Q.\,BD + 2\,Q.\,DE + 2\,Q.\,AD$, und daher $Q.\,BE + Q.\,EC + 2\,Q.\,AE = 2\,Q.\,BD + 2\,Q.\,AD$. Es ist aber $Q.\,BE + Q.\,AE = Q.\,AB$, und $Q.\,EC + Q.\,AE = Q.\,AC$, also ist $Q.\,BE + Q.\,EC + 2\,Q.\,AE = Q.\,AB + Q.\,AC$, folglich $Q.\,AB + Q.\,AC = 2\,Q.\,BD + 2\,Q.\,AD$, oder $= 2\,(Q.\,BD + Q.\,AD)$.

Zweiter Fall. Wenn der Endpunkt E der senkrechten AE auf der Verlängerung der Seite BC liegt. (Fig. 28.) Es ist $Q.\,BE + Q.\,CE = 2\,(Q.\,BD + Q.\,DE)$, nach dem 10ten Satz des zweiten Buchs der Elemente. Auch ist (im rechtwinklichen Dreieck AED) $2\,Q.\,AE + 2\,Q.\,DE = 2\,Q.\,AD$, folglich ist $Q.\,BE + Q.\,CE + 2\,Q.\,AE = 2\,Q.\,BD + 2\,Q.\,AD$. Es ist aber $Q.\,BE + Q.\,AE = Q.\,AB$ und $Q.\,CE + Q.\,AE = Q.\,AC$, also ist $Q.\,AB + Q.\,AC = 2\,Q.\,BD + 2\,Q.\,AD$, oder $= 2\,(Q.\,BD + Q.\,AD)$.

Anmerkung.

Diesen Satz hat schon der Alexandriner Pappus vorgetragen, und Clavius gleichfalls in seinem Commentar des zweiten Buchs der Elemente, bei dem 15ten Satz des Euklid's. Aus ihm läßt sich umgekehrt der vorhergehende Lehrsatz ableiten.

Siebente Erweiterung des pythagoräischen Lehrsatzes.

Lehrsatz. (Fig. 30.)

In jedem Dreieck ist die Differenz der Quadrate zweier Seiten AB und AC der Differenz der Quadrate der durch die senkrechte Linie AD abgeschnittnen Stücke der dritten Seite BC gleich.

Beweis.

Denn es ist ABq = ADq + BDq, und ACq = ADq + CDq. Also ADq — ACq = BDq — CDq.

Zusatz.

Also ist auch ABq + ACq = BDq + CDq + 2ADq.

Achte Erweiterung des pythagoräischen Lehrsatzes.

Lehrsatz. (Fig. 29. Nr. 1. und 2.)

In jedem Dreieck BAC, es sei spitzwinklich, rechtwinklich oder stumpfwinklich, ist die Summe der auf zwei beliebigen Seiten AB und AC desselben beschriebenen beliebigen Parallelogramme ABDE und ACGF demjenigen Parallelogramm BCLK der dritten Seite BC gleich, welches entsteht, wenn man mit der, von dem Durchschnittspunkt H der verlängerten Seiten DE und GF der beiden Parallelogramme, zu dem der dritten Seite BC des Dreiecks BAC gegenüberliegenden Winkelpunkt A gezogenen geraden Linie HA, durch die Endpunkte B und C dieser dritten Seite, Parallellinien BK und CL zieht, solche verlängert, bis sie die Seiten DE und GF der Parallelogramme oder

ihre Verlängerungen schneiden, und die Durchschnittspunkte K und L mit einer geraden Linie KL verbindet.

Beweis.

Es ist zu zeigen: 1) daß die geraden Linien DE und GF verlängert zusammentreffen, 2) daß die auf die angegebene Art beschriebene vierseitige Figur BCLK ein Parallelogramm ist, und 3) daß dieses Parallelogramm den beiden auf den zwei andern Seiten des Dreiecks beschriebenen Parallelogrammen ABDE und ACGF zusammen gleich ist.

1) DE und AB sind parallel, als gegenüberstehende Seiten des Parallelogramms ABDE, nun schneidet CB die eine Parallele AB, also schneidet CB, verlängert, auch die andere verlängerte Parallele ED. Dieß sei im Punkt P, so ist der Winkel EPC = dem äussern Winkel ABC. Es sind aber auch AC und FG parallel, als gegenüberstehende Seiten des Parallelogramms ACGF, und AC wird von BC geschnitten, also wird auch die verlängerte Parallele FG von der verlängerten BC geschnitten. Dieß geschehe im Punkt N, so ist der Winkel FNB = dem äussern Winkel ACB. Da nun in jedem Dreieck die Summe zweier Winkel kleiner als zwei rechte ist, so ist ABC + ACB im Dreieck BAC kleiner als zwei rechte. Folglich EPC + FNB auch kleiner als zwei rechte, daher treffen die geraden Linien PE und NF, über die Punkte E und F hinaus verlängert, zusammen. Dieses geschehe im Punkt H. Hierauf ziehe man HA und verlängere diese Linie, bis sie die Seite BC trift. Dieses sei im Punkt I. Ferner ziehe man BK, so wie auch CL mit HI parallel, bis sie mit DH und GH zusammentreffen. Dieses sei in den Punkten K und L. Endlich ziehe man KL.

2) Da

2) Da BK und CL mit AH parallel sind, so sind sie auch mit einander parallel Da ferner HL mit AC parallel ist, und Parallelen zwischen Parallelen gleich sind, so ist CL = AH. Eben so ist, weil DH mit BA, und BK mit AH parallel ist, auch BK = AH, also ist BK = CL. Nun sind aber auch ausserdem CL und BK parallel, folglich ist das Viereck BCLK ein Parallelogramm.

3) Die Parallelogramme ABKH und ABDE sind gleich, weil sie auf der nemlichen Grundlinie AB und zwischen den nemlichen Parallelen AB und HD stehen, es sind aber auch die Parallelogramme ABKH und MIBK gleich, weil sie auf der nemlichen Grundlinie BK und zwischen einerlei Parallelen BK und IH stehen. Folglich sind auch die Parallelogramme ABDE und MIBK gleich.

Die Parallelogramme ACLH und ACGF sind gleich, weil sie auf der nemlichen Grundlinie AC und zwischen einerlei Parallelen AC und HG stehen, aber auch die Parallelogramme ACLH und CIML sind gleich, weil sie auf der nemlichen Grundlinie CL und zwischen einerlei Parallelen CL und IH stehen, folglich sind auch die Parallelogramme ACGF und CIML gleich.

Nun besteht das Parallelogramm BCLK aus den beiden Parallelogrammen MIBK und CIML, da aber diese beiden Parallelogramme den Parallelogrammen ABDE und ACGF gleich sind, so ist auch das Parallelogramm BCLK den Parallelogrammen ABDE und ACGF zusammen gleich.

Erster Zusatz.

Da nach dem Erwiesenen BK = AH ist, so kann man auch sagen, das Parallelogramm BCLK sei ein solches, dessen eine Seite die dritte Seite BC des gegebenen Dreiecks, und die andere anliegende Seite der von dem Zusammen-

treffungspunkt H der verlängerten Seiten DE und GF der beiden andern Parallelogramme zu dem Winkelpunkt A des gegebenen Dreiecks, welcher der dritten Seite BC gegenüber liegt, gezogenen geraden Linie HA gleich ist.

Zweiter Zusatz.

Wenn das Dreieck BAC rechtwinklich, und die Seiten AB und AC die Katheten desselben, ferner die auf diesen Katheten beschriebenen Parallelogramme Quadrate sind, so läßt sich erweisen, daß das auf der Hypotenuse BC nach der im Lehrsatz angegebenen Art beschriebene Parallelogramm BCLK ein Quadrat ist, (Fig. 12.) wie in der 7ten Beweisart des pythagoräischen Lehrsatzes gezeigt wurde. Hierauf folgt aus dem Beweis für den allgemein ausgedrückten Lehrsatz, daß das Quadrat der Hypotenuse der Summe der beiden Kathetenquadrate gleich ist.

Anmerkung.

Pappus hat schon einen Lehrsatz aufgestellt und bewiesen, der allgemeiner als der pythagoräische und dem eben ausgeführten ähnlich ist. Aber doch gielt seine Construction und sein Beweis nur für den Fall, wenn die Winkel des Parallelogramms ABDE, den Winkeln des Parallelogramms, ACGF, einzeln genommen, gleich sind, nemlich BAE = CAF, und AED = AFG = BAC, so daß er nemlich AF mit BA und AE mit CA in einer geraden Linie liegend, annimmt. Clavius hat nun zuerst, in seinem Commentar der Elemente, den Satz des Pappus so erweitert, wie ich ihn vorgetragen habe. Er hat ihm nemlich die Allgemeinheit gegeben, daß beliebige Parallelogramme auf den beiden Seiten AB und AC beschrieben werden dürfen, es mögen nun beide rechtwinklich, oder beide schiefwinklich, oder das eine rechtwinklich und das andere schiefwinklich, oder das eine schiefwinkliche mit dem andern schiefwinklichen gleichwinklich oder nicht gleichwinklich seyn.

IV.

Pythagoräische Zahlendreiecke.

Aufgabe.

Drei ganze Zahlen x, y und z von der Beschaffenheit zu finden, daß die Summe der Quadrate von zwei dieser ganzen Zahlen, (z. B. von x und y) dem Quadrat der dritten ganzen Zahl z gleich sei.

Erste Art der Auflösung.

Als kleinste ganze Zahl x nehme man eine beliebige ungerade Zahl an, erhebe sie auf das Quadrat, subtrahire von diesem Quadrat die Zahl eins, und halbire diesen Rest, so ist diese Hälfte die gesuchte zweite ganze Zahl y, endlich addire man zu dieser zweiten Zahl eins, so ist $y + 1$ die gesuchte dritte ganze Zahl z, und es wird $x^2 + y^2 = z^2$ seyn.

Zahlenbeispiel.

Es sei $x = 5$, so ist $x^2 = 25$, ferner $x^2 - 1 = 24$ und $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{24}{2} = 12 = y$. Endlich ist $y + 1 = 12 + 1 = 13 = z$. Also sind die drei gesuchten ganzen Zahlen 5, 12, und 13, und es ist $x^2 + y^2 = z^2$ nemlich $5^2 + 12^2 = 13^2$, oder $25 + 144 = 169$, und 13 mal 13 auch 169.

Beweis.

Es seien x, y und z die drei gesuchten ganzen Zahlen, also $x^2 + y^2 = z^2$, so ist $x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$. Nun seien u und w auch ganze Zahlen,

und zwar sei $z + y = u$

und $z - y = w$

so ist $2z = u + w$

und $z = \frac{u + w}{2}$

Ferner ist $y = \frac{u - w}{2}$

Auch ist $(z + y)(z - y)$ oder $x^2 = uw$

und daher $x = \sqrt{uw}$

Soll nun diese Quadratwurzel eine ganze Zahl seyn, so muß das Product uw eine vollkommne Quadratzahl seyn, diese wird am leichtesten erhalten, wenn man den Factor u einer vollkommnen Quadratzahl n^2 und den Factor w auch einer vollkommnen Quadratzahl m^2 gleich setzt, so ist $uw = n^2 m^2$, und $x = \sqrt{uw} = \sqrt{n^2 m^2} = nm$. Ferner, da

$y = \frac{u - w}{2}$ ist, so ist $y = \frac{n^2 - m^2}{2}$

und da $z = \frac{u + w}{2}$ ist, so ist $z = \frac{n^2 + m^2}{2}$

Setzt man $m = 1$, so ist $nm = n$, nun war $x = nm$ also ist $x = n$

ferner $y = \frac{n^2 - 1}{2} = \frac{x^2 - 1}{2}$

und $z = \frac{n^2 + 1}{2} = \frac{x^2 + 1}{2} = \frac{x^2 - 1 + 2}{2} = \frac{x^2 - 1}{2} + 1$

$= y + 1.$

Es ist blos noch darauf zu sehen, daß der Ausdruck $\frac{x^2 - 1}{2}$ eine ganze Zahl werde, weil y eine ganze Zahl seyn soll. Es muß also x so angenommen werden, daß

$x^2 - 1$ eine gerade Zahl wird. Wenn aber 1 von einer ungeraden Zahl subtrahirt wird, so ist der Rest eine gerade Zahl, folglich muß x^2 eine ungerade Zahl seyn. Allein nur das Quadrat einer ungeraden Zahl ist auch eine ungerade Zahl, folglich muß x oder n als eine beliebige ungerade Zahl angenommen werden.

Z. B.

Es sei $x = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 \ldots$

so ist $y = \frac{x^2 - 1}{2} = 4, 12, 24, 40, 60, 84, 112, 144 \ldots$

und $z = y + 1 = 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145 \ldots$

Anmerkung.

Diese Auflösung hat schon Proklus vorgetragen. Die Erfindung derselben wird gewöhnlich dem Pythagoras zugeschrieben.

Zweite Art der Auflösung.

Als kleinste ganze Zahl x nehme man eine beliebige gerade Zahl an, halbire sie, erhebe diese Hälfte auf das Quadrat, und subtrahire davon eins, so ist dieser Rest die gesuchte zweite ganze Zahl y, endlich addire man eins zu dem nemlichen Quadrat, so ist die Summe die gesuchte dritte ganze Zahl z.

Zahlenbeispiel.

Es sei $x = 8$, so ist $\frac{1}{2} x = 4$, und $(\frac{1}{2} x)^2 = 4 \cdot 4 = 16$, folglich $(\frac{1}{2} x)^2 - 1 = 15 = y$ und $(\frac{1}{2} x)^2 + 1 = 16 + 1 = 17 = z$. Also sind die drei verlangten ganzen Zahlen, 8, 15 und 17, und es ist $x^2 + y^2 = z^2$, nemlich $8^2 + 15^2 = 17^2$. Oder $64 + 225 = 289$, und 17 mal 17 auch $= 289$.

Beweis.

Es seien x, y und z die drei gesuchten ganzen Zahlen, und man verfahre eben so, wie in dem Beweis der vorigen Auflösung, so ist

$$y = \frac{u - w}{2}$$

$$z = \frac{u + w}{2}$$

$$\text{und } x = \sqrt{uw}$$

Wenn nun diese Quadratwurzel eine ganze Zahl seyn soll, so muß das Product uw eine vollkommne Quadratzahl seyn, es sei also $uw = t^2$, so ist $x = \sqrt{t^2}$ oder $x = t$. Man zerlege hierauf t^2 in ein Paar ungleiche Factoren mn^2 und m, wovon jeder auch als eine ganze Zahl angenommen wird, und die mit einander multiplicirt das Product $m^2 n^2$ geben, welches auch eine vollkommne Quadratzahl, und $= t^2$ ist. Da nun $x = t$ ist, so ist $x = mn$. Ferner setze man $u = mn^2$ und $w = m$, also $uw = m^2 n^2 = x^2$ wie gehörig.

Da nun $y = \frac{u - w}{2}$ ist, so ist $y = \frac{mn^2 - m}{2}$, oder

$$= m \frac{n^2 - 1}{2} \quad \text{oder} = \frac{m}{2}(n^2 - 1)$$

und da $z = \frac{u + w}{2}$ ist, so ist $z = \frac{mn^2 + m}{2}$ oder

$$= \frac{m}{2}(n^2 + 1)$$

Man setze hierauf $m = 2$, so ist $\frac{m}{2} = 1$, folglich

$$x = mn = 2n \text{ und } \tfrac{1}{2}x = n,$$

$$y = n^2 - 1 = (\tfrac{1}{2}x)^2 - 1$$

$$\text{und } z = n^2 + 1 = (\tfrac{1}{2}x)^2 + 1$$

Da nun $x = 2n$ ist, so wird, es mag für n eine gerade oder ungerade Zahl angenommen werden, das Dop-

pelte der ganzen Zahl n, das heißt: die Zahl x eine gerade Zahl seyn, und y so wie auch z werden, unter der Voraussetzung, daß x eine gerade Zahl ist, auch in ganzen Zahlen gefunden werden.

Z. B.

Es sei $x = 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 \ldots$

so ist $y = (\frac{1}{2}x)^2 - 1 = 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99 \ldots$

und $z = (\frac{1}{2}x)^2 + 1 = 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101 \ldots$

Anmerkung.

Diese Art der Auflösung ist auch schon sehr alt. Proklus führt sie gleichfalls an, und ihre Erfindung wird gewöhnlich dem Plato zugeschrieben. Wenn man die vorige Art der Auflösung und diese mit einander verbindet, so ist die Aufgabe in so ferne vollständig aufgelößt, daß man zu jeder gegebenen ganzen Zahl x, sie sei gerade oder ungerade, eine andere ganze Zahl y finden kann, deren Quadrat zu dem Quadrat der gegebenen Zahl addirt, das Quadrat einer dritten ganzen Zahl z macht.

Z. B.

Es sei $x = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \ldots$

so ist $y = 4, 3, 12, 8, 24, 15, 40, 24, 60, 35 \ldots$

und $z = 5, 5, 13, 10, 25, 17, 41, 26, 61, 37 \ldots$

Aber demohngeachtet sind diese Reihen nicht so vollständig, daß sie alle möglichen Fälle für jedes gegebene oder angenommene x enthalten. Z. B. für $x = 12$ ist nach dieser Tabelle $y = 35$ und $z = 37$, aber für $x = 12$ kann auch $y = 16$ und $z = 20$ seyn, auch kann für $x = 12$, der Werth von $y = 9$ und von $z = 15$ u. s. f. seyn. Es zeigt sich auch die Beschränktheit dieser beiden Arten Auflösungen schon daraus, weil y und z entweder nur um 1 oder höchstens um 2 differiren. Setzt man aber in der obigen Formel $m = 4$, so ist $\frac{m}{2} = 2$, also $y = 2(n^2 - 1)$, $z = 2(n^2 + 1)$ und $x = 4n$, folglich ist $y = 2n^2 - 2$ und $z = 2n^2 + 2$,

also $z - y = 4$. Daher erhält man nun für y und z ganz andere Werthe als in der obigen Tabelle, wenn auch x mit dem in der Tabelle einerlei ist.

3. B.

Es sei n =	2,	3,	4,	5
so ist $x = 4n =$	8,	12,	16,	20
$y = 2(n^2 - 1) =$	6,	16,	30,	48
$z = 2(n^2 + 1) =$	10,	20,	34,	52

In der Tabelle aber, ist für $x = 8$, der Werth von $y = 15$ und von $z = 17$, für $x = 12$ ist $y = 35$ und $z = 37$, u. s. f.

Will man also für einen gegebenen Werth von x die meisten dazu gehörigen Werthe von y und z haben, welche der Aufgabe Genüge leisten, so verfahre man auf folgende Art.

Es sei x eine gerade gegebene Zahl, z. B. 24.

Man nehme die drei allgemeinen Formeln:

$$x = mn \text{ also } \frac{x}{m} = n$$

$$y = \frac{m(n^2 - 1)}{2}$$

$$z = \frac{m(n^2 - 1)}{2}$$

Hierauf zerlege man 24 in seine Factoren, diese sind 1 und 24, 2 und 12, 3 und 8, 4 und 6.

Man nehme zuerst für m die geraden Factoren, 2, 4, 6, 8 und 12. Hier läßt sich m mit 2 theilen, also mag n eine gerade oder ungerade Zahl seyn, y und z werden sich immer in ganzen Zahlen finden lassen.

Es sei also $m = 2$, so ist $n = 12$, $y = n^2 - 1 = 143$ und $z = n^2 + 1 = 145$.

Ferner sei $m = 4$, so ist $n = 6$, $y = 2(n^2 - 1) = 70$ und $z = 2(n^2 + 1) = 74$

Ferner sei $m = 6$, so ist $n = 4$, $y = 3(n^2 - 1) = 45$ und $z = 3(n^2 + 1) = 51$

Ferner sei $m = 8$, so ist $n = 3$, $y = 4\ (n^2 - 1) = 32$
und $z = 4\ (n^2 + 1) = 40$

Endlich sei $m = 12$, so ist $n = 2$, $y = 6\ (n^2 - 1) = 18$
und $z = 6\ (n^2 + 1) = 30$

Hierauf nehme man für m die ungeraden Factoren, 1 und 3.

Wenn nun y und z ganze Zahlen werden, also m $(n^2 - 1)$ und m $(n^2 + 1)$ durch zwei theilbar seyn sollen, so muß n so genommen werden, daß, (weil m als ungerade Zahl durch 2 nicht theilbar ist,) $n^2 - 1$ und $n^2 + 1$ durch 2 theilbar, oder daß $n^2 - 1$ und $n^2 + 1$ gerade Zahlen sind. Dieses erhält man, wenn man für n eine ungerade Zahl nimmt, weil das Quadrat einer ungeraden Zahl auch eine ungerade Zahl ist, und dazu 1 addirt oder subtrahirt, die Summe oder die Differenz eine gerade Zahl wird.

Nun ist im gegenwärtigen Beispiel die gegebene Zahl $x = 24$ eine gerade Zahl, folglich können die beiden Factoren nicht ungerade seyn, sondern wenn der eine ungerade ist, so muß der andere Factor gerade seyn. Da aber für m ein ungerader Factor genommen wird, so wird der andere Factor n gerade seyn, also kann, wenn die gegebene Zahl x gerade ist, m nicht ungerade angenommen werden, wenn y und z in ganzen Zahlen bestimmt werden sollen. Folglich können bei der gegebenen Zahl $x = 24$, nur folgende fünf Werthe für y und z gefunden werden.

$y = 18$	$y = 32$	$y = 45$	$y = 70$	$y = 143$
$z = 30$	$z = 40$	$z = 51$	$z = 74$	$z = 145$

Es sei ferner x eine ungerade gegebene Zahl, z. B. 45.

Man zerlege 45 in die Factoren 1 und 45, 3 und 15, 5 und 9.

Man nehme für m successiv alle diese ungeraden Factoren, 1, 3, 5, 9, 15, 45.

Nach dem obigen muß nun der andere Factor n eine ungerade Zahl seyn, welches hier der Fall ist, da die gegebene Zahl eine ungerade Zahl ist.

Es sei also $m = 1$, so ist $n = 45$, $y = \frac{n^2 - 1}{2} = 512$

und $z = \frac{n^2 + 1}{2} = 513$.

Ferner sei $m = 3$, so ist $n = 15$, $y = 3\,\frac{n^2 - 1}{2} = 336$

und $z = 3\,\frac{n^2 + 1}{2} = 339$.

Ferner sei $m = 5$, so ist $n = 9$, $y = 5\,\frac{n^2 - 1}{2} = 200$

und $z = 5\,\frac{n^2 + 1}{2} = 205$.

Ferner sei $m = 9$, so ist $n = 5$, $y = 9\,\frac{n^2 - 1}{2} = 108$

und $z = 9\,\frac{n^2 + 1}{2} = 117$.

Endlich sei $m = 15$, so ist $n = 3$, $y = 15\,\frac{n^2 - 1}{2} = 60$

und $z = 15\,\frac{n^2 + 1}{2} = 75$.

Für $m = 45$ würde $n = 1$, folglich $n^2 - 1 = 0$, also $y = 0$ werden, daher kann m nicht $= 45$ gesetzt werden.

Also findet man bei der gegebenen Zahl $x = 45$ folgende fünf Werthe für y und z in ganzen Zahlen:

$y = 60$, $y = 108$, $y = 200$, $y = 336$, $y = 512$.
$z = 75$, $z = 117$, $z = 205$, $z = 339$, $z = 513$.

Den Werth von z kann man auch aus dem gefundenen Werth von y sehr leicht ableiten, wenn man zu dem gefundenen Werth von y die Zahl m addirt. Denn nach den allgemeinen Formeln ist

$$z = \frac{m(n^2 + 1)}{2} = \tfrac{1}{2} mn^2 + \tfrac{1}{2} m$$

$$\text{und } y = \frac{m(n^2 - 1)}{2} = \tfrac{1}{2} mn^2 - \tfrac{1}{2} m$$

Also $z - y = m$

folglich $z = y + m$.

Z. B. Wenn die gegebene ganze Zahl $x = 24$ ist, und $m = 2$ angenommen wird, also $n = 12$ ist, so ist $y = 143$, folglich $z = y + m = 143 + 2 = 145$. Ferner wenn $m = 4$, also $n = 6$ ist, so ist $y = 70$ und $z = y + m = 70 + 4 = 74$, u. s. f. Es sei ferner die gegebene Zahl $x = 45$, und $m = 9$, also $n = 5$, so ist $y = 108$ folglich $z = y + m = 108 + 9 = 117$ u. s. f.

Ist die gegebene ganze Zahl x eine Primzahl, die sich also nur in die Factoren 1 und x zerlegen läßt, so findet nur ein einziger Werth für y und z statt. Z. B. Es sei $x = 19$. Die Factoren sind 1 und 19. Man setze $m = 1$, so ist $n = 19$, $y = \frac{n^2 - 1}{2} = 180$ und $z = y + m = 181$. Denn wenn man $m = 19$ setzen wollte, so würde $n = 1$ seyn, und daher $y = 0$ werden.

Wenn hingegen die gegebene ganze Zahl x eine zusammengesetzte Zahl ist, so findet man, wenn sie gerade ist, für y und folglich auch für z so viele Werthe in ganzen Zahlen, als sie gerade Factoren hat, (den Factor, welcher der Zahl x selbst gleich ist, ausgeschlossen,) wenn sie aber ungerade ist, so hat y und daher auch z so viele Werthe, als die Zahl x überhaupt Factoren in ganzen Zahlen hat, denjenigen Factor, welcher der Zahl x gleich ist, wiederum ausgeschlossen. Z. B. Die gegebene ganze Zahl x sei $= 360$.

Ihre Factoren in ganzen Zahlen findet man, wie bekannt, durch folgende Operation vollständig.

360	1,
180	2,
90	2, 4,
45	2, 8,
15	3, 6, 12, 24,
3	5, 10, 15, 20, 30, 40, 60, 120,
1	3, 9, 12, 18, 36, 45, 72, 90, 180, 360.

Ihre Factoren in ganzen Zahlen sind also vollständig:

$$\begin{Bmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 8, & 9, & 10, & 12, & 15, & 18 \\ 360, & 180, & 120, & 90, & 72, & 60, & 45, & 40, & 36, & 30, & 24, & 20 \end{Bmatrix}$$

Da nun die gegebene Zahl 360 eine gerade Zahl ist, so nehme man für m nach und nach nur die geraden Factoren, (den Factor 360 ausgeschlossen,) nemlich

2, 4, 6, 8, 10, 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 60, 72, 90, 120, 180.

so findet man für y so viele Werthe, als die Anzahl dieser geraden Factoren angiebt, nemlich 17 Werthe, und folglich für z auch so viele in ganzen Zahlen.

Es sei nemlich $m = 2$, so ist $n = 180$, $y = n^2 - 1 = 32399$
und $z = y + m = 32401$,
ferner sei $m = 4$, so ist $n = 90$, $y = 2\ (n^2 - 1) = 16198$
und $z = y + m = 16202$,
ferner sei $m = 6$, so ist $n = 60$, $y = 3\ (n^2 - 1) = 10797$
und $z = y + m = 10803$,
ferner sei $m = 8$, so ist $n = 45$, $y = 4\ (n^2 - 1) = 8096$
und $z = y + m = 8104$,
ferner sei $m = 10$, so ist $n = 36$, $y = 5\ (n^2 - 1) = 6475$
und $z = y + m = 6485$,
ferner sei $m = 12$, so ist $n = 30$, $y = 6\ (n^2 - 1) = 5394$
und $z = y + m = 5406$,
ferner sei $m = 18$, so ist $n = 20$, $y = 9\ (n^2 - 1) = 3591$
und $z = y + m = 3609$,
ferner sei $m = 20$, so ist $n = 18$, $y = 10\ (n^2 - 1) = 3230$
und $z = y + m = 3250$,
ferner sei $m = 24$, so ist $n = 15$, $y = 12\ (n^2 - 1) = 2688$
und $z = y + m = 2712$,
ferner sei $m = 30$, so ist $n = 12$, $y = 15\ (n^2 - 1) = 2145$
und $z = y + m = 2175$,
ferner sei $m = 36$, so ist $n = 10$, $y = 18\ (n^2 - 1) = 1782$
und $z = y + m = 1818$,
ferner sei $m = 40$, so ist $n = 9$, $y = 20\ (n^2 - 1) = 1600$
und $z = y + m = 1640$,

ferner sei $m = 60$, so ist $n = 6$, $y = 30\ (n^2 - 1) = 1050$
und $z = y + m = 1110$,
ferner sei $m = 72$, so ist $n = 5$, $y = 36\ (n^2 - 1) = 864$
und $z = y + m = 936$,
ferner sei $m = 90$, so ist $n = 4$, $y = 45\ (n^2 - 1) = 675$
und $z = y + m = 765$,
ferner sei $m = 120$, so ist $n = 3$, $y = 60\ (n^2 - 1) = 480$
und $z = y + m = 600$,
endlich sei $m = 180$, so ist $n = 2$, $y = 90\ (n^2 - 1) = 270$
und $z = y + m = 450$.

Folglich findet man bei der gegebenen ganzen Zahl 360 $= x$ folgende 17 Werthe für y und z in ganzen Zahlen, und zwar so, daß immer $x^2 + y^2 = z^2$ ist.

y = 270	480	675	864	1050	1600
z = 450	600	765	936	1110	1640
y = 1782	2145	2688	3230	3591	5394
z = 1818	2175	2712	3250	3609	5406
y = 6475	8096	10797	16198	32399	
z = 6485	8104	10803	16202	32401	

Diese 17 Werthe von y und z für die gegebene Zahl 360 sind aber nicht alle möglichen Werthe in ganzen Zahlen. Die übrigen findet man, wenn man n einem gewissen unächten Bruch $\frac{r}{t}$ gleich setzt. Es sei nemlich eine ganze Zahl r größer als eine andere ganze Zahl t, und zwar seien sie Primzahlen zu einander, so ist $\frac{r}{t}$ ein unächter, in den kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch $= n$. Da nun die gegebene gerade Zahl $a = nm$, folglich $\frac{a}{n} = m$ ist, so muß a dividirt mit $\frac{r}{t}$ oder multiplicirt mit $\frac{t}{r}$, nemlich das Product $\frac{at}{r} = m$, das heißt: eine ganze und zwar gerade Zahl seyn. Da aber $y = \frac{1}{2}\ m\ (n^2 - 1)$ ist, so ist $y = \frac{1}{2}\ m$

$\left(\frac{r^2}{t^2}-1\right)=\frac{1}{2}m\,\frac{r^2-t^2}{t^2}=\frac{\frac{1}{2}m}{t^2}(r^2-t^2)=\frac{m}{2t^2}(r^2-t^2)$.

Wenn aber y eine ganze Zahl seyn soll, so muß $\frac{m}{2t^2}$ eine ganze Zahl seyn, die aber sowohl gerade als ungerade seyn darf. Substituirt man in dem Ausdruck $\frac{m}{2t^2}$ statt m den Werth $\frac{at}{r}$, so muß auch $\frac{at}{2rt^2}$ oder $\frac{a}{2rt}$ eine ganze Zahl seyn. Diese sei $= c$, oder $\frac{a}{2rt}=c$, so ist $\frac{a}{rt}=2c$, das heißt: eine gerade Zahl, also auch $\frac{a}{r}=2ct$ eine gerade Zahl, folglich auch $\frac{at}{r}=2ct^2$ eine gerade Zahl, und da $\frac{at}{r}=m$ ist, so ist nun m eine gerade Zahl, wie gehörig. Man nehme also unter den geraden Factoren der gegebenen geraden Zahl a, einen beliebigen g an, und setze, er sei $= 2rt$, hierauf halbire man ihn, so hat man rt als ganze Zahl. Ferner zerlege man rt in alle ungleiche Factoren in ganzen Zahlen, (sollte $\frac{1}{2}$ g eine Primzahl seyn, so ist diese unbrauchbar, weil der Nenner $t = 1$, folglich $\frac{r}{t}$ oder n eine ganze Zahl werden würde, welcher Fall schon als berechnet vorausgesetzt wird,) setze den größern Factor $= r$, und den kleinern $= t$, so hat man den unächten Bruch $\frac{r}{t}=n$ gefunden. Endlich berechne man $\frac{at}{r}$, so hat man m.

Für das gegenwärtige Zahlenbeispiel ist $a = 360$, die geraden Factoren davon sind: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 60, 72, 90, 120, 180 und 360. Hiervon sind 2, 4, 6, 8 und 10 nicht zu gebrauchen, (weil die Hälfte eines jeden entweder eine Primzahl ist, oder nur gleiche Factoren hat, wie 4 nur die Factoren 2 und 2, da die Factoren 1 und 4 ausgeschlossen werden, weil sonst $\frac{r}{t}=\frac{4}{1}=4$, also n eine ganze Zahl seyn würde, welcher

Fall schon als berechnet vorausgesetzt wird,) also nehme man $12 = 2rt$, davon ist die Hälfte $6 = rt$, und die ungleichen brauchbaren Factoren von 6 sind 2 und 3, also ist $\frac{r}{t} = \frac{3}{2} = n$, und $n^2 = \frac{9}{4}$, ferner ist $\frac{at}{r} = \frac{360.2}{3} = 240 = m$, folglich $\frac{1}{2}m = 120$, daher $y = \frac{1}{2}m(n^2 - 1) = 120\left(\frac{9}{4} - 1\right) = 120.\frac{5}{4} = 150$, und $z = y + m = 150 + 240 = 390$.

Ferner nehme man 18, davon ist die Hälfte 9, als rt nicht zu gebrauchen, also nehme man den folgenden Factor 20, davon ist die Hälfte $10 = rt$, und die ungleichen brauchbaren Factoren von 10 sind 5 und 2, also ist $\frac{r}{t} = \frac{5}{2} = n$, und $n^2 = \frac{25}{4}$, ferner ist $\frac{at}{r} = \frac{360.2}{5} = 144 = m$, folglich $\frac{1}{2}m = 72$, daher $y = \frac{1}{2}m(n^2 - 1) = 72.\frac{21}{4} = 378$, und $z = y + m = 378 + 144 = 522$.

Ferner nehme man 24, davon ist die Hälfte $12 = rt$, und die ungleichen brauchbaren Factoren sind 3 und 4, (denn 2 und 6 sind zu übergehen, weil 2 in 6 aufgeht,) also ist $\frac{r}{t} = \frac{4}{3} = n$, und $n^2 = \frac{16}{9}$, ferner ist $\frac{at}{r} = \frac{360.3}{4} = 270 = m$, folglich $\frac{1}{2}m = 135$, daher $y = \frac{1}{2}m(n^2 - 1) = 135\left(\frac{16}{9} - 1\right) = 135.\frac{7}{9} = 105$, und $z = y + m = 375$.

Ferner nehme man 30, davon ist die Hälfte $15 = rt$, und die brauchbaren Factoren 3 und 5, also ist $\frac{r}{t} = \frac{5}{3} = n$, und $n^2 = \frac{25}{9}$, ferner ist $\frac{at}{r} = \frac{360.3}{5} = 216 = m$, folglich $\frac{1}{2}m = 108$, daher $y = \frac{1}{2}m(n^2 - 1) = 108\left(\frac{25}{9} - 1\right) = 108.\frac{16}{9} = 192$, und $z = y + m = 192 + 216 = 408$.

Nach dieser Vorschrift verfahre man weiter, bis man alle geraden Factoren der geraden Zahl a durchgegangen hat, so erhält man, wenn man diese gefundenen Werthe, und die vorhin berechneten von y und z verbindet, alle Werthe von y und z in ganzen Zahlen für die gegebene gerade Zahl a, (in unserm Beispiel für 360,) in ganzen Zahlen, so daß immer $a^2 + y^2 = z^2$ ist.

Es sei aber die gegebene Zahl a ungerade, so ist m auch eine ungerade Zahl, weil $a = mn$ ist. Setzt man nun den unächten Bruch $\frac{r}{t} = n$, so ist, (weil $\frac{a}{n} = m$ ist,) $\frac{at}{r} = m$, also muß $\frac{at}{r}$ eine ganze Zahl seyn. Aber da nun $y = m\frac{n^2 - 1}{2}$ so ist, wenn man statt n^2 den Werth $\frac{r^2}{t^2}$ substituirt, $y = m\left(\frac{\frac{r^2}{t^2} - 1}{2}\right)$ oder $y = m\frac{r^2 - t^2}{t^2}$, oder $y = \frac{m}{t^2}\left(\frac{r^2 - t^2}{2}\right)$. Soll nun y eine ganze Zahl werden, so muß nicht nur $\frac{m}{t^2}$ sondern auch $\frac{r^2 - t^2}{2}$ eine ganze Zahl seyn. Es ist aber $\frac{m}{t^2} = \frac{at}{rt^2} = \frac{a}{rt}$, also muß $\frac{a}{rt}$ eine ganze Zahl seyn, sodann wird auch $\frac{a}{r}$, folglich $\frac{at}{r}$ eine ganze Zahl seyn. Es muß nun, wenn $\frac{a}{rt}$ eine ganze Zahl seyn soll, rt als ein Theiler von a angenommen werden. Man nehme also unter den Factoren der ungeraden Zahl a, die alle ungerade sind, einen beliebigen Factor f, der aber keine Primzahl seyn darf, damit t nicht = 1 wird, und setze f = rt, so ist rt ungerade. Hierauf zerlege man f in ungleiche Factoren, die also auch ungerade sind, setze davon den größern = r und den kleinern = t, so sind auch r^2 und t^2 ungerade, folglich $r^2 - t^2$ eine gerade Zahl, also durch 2 theilbar,

folglich

folglich ist $\frac{r^2 - t^2}{2}$ eine ganze Zahl, wie erfordert wurde.

Z. B. Es sei die gegebene ungerade Zahl $a = 45$, deren Factoren 1, 3, 5, 9, 15 und 45 sind. Die Factoren 1, 3 und 5 müssen als Primzahlen übergangen werden, die Zahl 9 hat nur 1 und 9, ferner 3 und 3 als Paare von Factoren, kann also auch nicht gebraucht werden, aber 15 hat die ungleichen Factoren 3 und 5, man setze also $5 = r$ und $3 = t$, so ist $\frac{r}{t} = \frac{5}{3} = n$, und $n^2 = \frac{25}{9}$. Ferner ist m

$$= \frac{at}{r} = \frac{45.3}{5} = 27, \text{ also } y = m\,\frac{n^2 - 1}{2} = 27\left(\frac{\frac{25}{9} - 1}{2}\right)$$

$$= 27 . \frac{8}{9} = 24, \text{ und } z = y + m = 24 + 27 = 51.$$

Hierauf nehme man den Factor 45, und zerlege ihn in 3 und 15, so wie in 5 und 9. Das erste Paar 3 und 15 sind nicht zu gebrauchen, weil 3 in 15 aufgeht, also nehme man 5 und 9, und setze $r = 9$ und $t = 5$, so ist $\frac{r}{t} = \frac{9}{5} = n$ und $n^2 = \frac{81}{25}$. Ferner ist $m = \frac{at}{r} = \frac{45.5}{9} = 25$,

$$\text{also } y = m\,\frac{n^2 - 1}{2} = 25\left(\frac{\frac{81}{25} - 1}{2}\right) = 25 . \frac{28}{25} = 28, \text{ und}$$

$$z = y + m = 28 + 25 = 53.$$

Ausser diesen Werthen kann man von y und z für die gegebene ungerade Zahl 45 keine mehr in ganzen Zahlen finden. Ordnet man sie nun zu den schon vorhin gefundenen fünf Werthen, bei deren Berechnung n als ganze Zahl vorausgesetzt wurde, so hat man in allem sieben Werthe sowohl von y als von z in ganzen Zahlen, nemlich folgende:

$y = 24$, $y = 28$, $y = 60$, $y = 108$, $y = 200$, $y = 336$, $y = 512$,
$z = 51$, $z = 53$, $z = 75$, $z = 117$, $z = 205$, $z = 339$, $z = 513$,

welche alle so zu $a = 45$ gehören, daß $a^2 + y^2 = z^2$ ist.

Bayerische Staatsbibliothek München

Ich habe absichtlich dieses Verfahren umständlich aus einander gesetzt, weil ich es noch nirgends vollständig ausgeführt gefunden habe.

Dritte Art der Auflösung.

1) Man nehme ein Paar solche ungleiche ganze Zahlen u und w, die entweder beide gerade oder beide ungerade sind, und deren Product uw eine vollkommne Quadratzahl giebt. Dieser letztern Bedingung wird entsprochen, wenn entweder u und w selbst vollkommne Quadratzahlen sind, oder wenn man ein Paar beliebige ganze Zahlen a und b wählt, die entweder beide gerade oder beide ungerade sind, hierauf ein beliebiges vielfaches α von a nimmt, und zwar ein ungerades, wenn a und b ungerade sind, ferner von b ein gleichvielfaches nimmt, so daß sich verhält $a : \alpha a = b : \alpha b$ oder $a : b = \alpha a : \alpha b$, und endlich a und b, so wie auch αa und αb mit einander multiplicirt, so daß dann $ab = w$ und $\alpha^2 ab = u$ gesetzt wird, so ist uw oder $\alpha^2 a^2 b^2$ auch eine vollkommne Quadratzahl, und u die größere, w die kleinere entweder gerade oder ungerade Zahl. Z. B. Es sei $a = 3$, $b = 7$ und $\alpha = 5$, so verhält sich $a : b = \alpha a : \alpha b$ nemlich $3 : 7 = 15 : 35$, und es ist $w = ab = 21$, $u = \alpha^2 ab = 15 . 35 = 525$ und $uw = 21 . 525 = 11025$ eine vollkommne Quadratzahl, deren Quadratwurzel $105 = \sqrt{uw}$ ist.

Diese Quadratwurzel ist die erste gesuchte Zahl x, folglich $uw = x^2 =$ der ersten gesuchten Quadratzahl.

2) Man subtrahire die kleinere ganze Zahl w von der größern u, halbire den Rest u — w, und erhebe diese Hälfte, nemlich $\frac{1}{2}$ (u — w) auf das Quadrat, so ist dieses das zweite gesuchte Quadrat = y^2.

Z. B. 525 — 21 ist = 504, davon die Hälfte = 252 und das Quadrat dieser Hälfte = 63504 = y^2.

3) Man addire das in ganzen Zahlen gefundene x^2 und y^2, so ist die Summe $x^2 + y^2$ auch eine vollkommne Quadratzahl = z^2, deren Quadratwurzel nemlich eine ganze Zahl = z ist.

Z. B. $x^2 + y^2$ ist = 11025 + 63504 = 74529 = z^2, wovon die Quadratwurzel 273 = z ist.

Beweis.

Daß uw eine vollkommne Quadratzahl ist, ist daraus klar, weil sie entweder = $a^2 b^2$ oder = $\alpha^2 a^2 b^2$ ist. Nun sind aber a und b, nach der Voraussetzung, ganze Zahlen, also ab eine ganze Zahl, es ist aber $a^2 b^2$ = ab . ab, also die Quadratwurzel davon = ab. Ferner ist α, nach der Voraussetzung, auch eine ganze Zahl, also αab eine ganze Zahl. Nun ist $\alpha^2 a^2 b^2 = \alpha ab . \alpha ab$, also die Quadratwurzel davon = αab. Folglich ist uw eine vollkommne Quadratzahl = x^2.

Ferner $\frac{1}{2}$ (u — w) wird eine gerade Zahl geben, weil u und w entweder beide gerade, oder beide ungerade Zahlen sind. Denn sie werden entweder selbst so vorausgesetzt, oder a und b werden von dieser Beschaffenheit angenommen. Wenn aber a und b gerade sind, so ist das

Product a b gerade, folglich auch w, welches = a b ist, nun mag das Vielfache α gerade oder ungerade angenommen werden, so ist α^2 a b oder u gerade, weil die gerade Zahl a b mit einer geraden oder ungeraden Zahl multiplicirt, wieder eine gerade Zahl giebt. Daher ist auch u — w gerade, folglich durch 2 theilbar, oder $\frac{1}{2}$ (u — w) eine ganze Zahl. Wenn aber a und b ungerade sind, so ist das Product a b ungerade, folglich auch w, welches = a b ist. Nun ist ferner das Vielfache α in diesem Fall ungerade angenommen worden, daher ist α^2 ungerade, folglich auch α^2 a b oder u. Also ist wiederum u — w eine gerade Zahl, (weil eine ungerade Zahl von einer ungeraden Zahl subtrahirt, eine gerade Zahl als Rest giebt,) das heißt: durch 2 theilbar, oder $\frac{1}{2}$ (u — w) ist wiederum eine ganze Zahl.

Also ist das Quadrat von $\frac{1}{2}$ (u — w), oder von $\frac{1}{2}$u — $\frac{1}{2}$w, nemlich $\frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{2}uw + \frac{1}{4}w^2$ auch eine vollkommne Quadratzahl = y^2.

Addirt man endlich u w und $\frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{2}uw + \frac{1}{4}w^2$, so ist die Summe $\frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{2}uw + \frac{1}{4}w^2$ auch eine vollkommne Quadratzahl = z^2, da ihre Quadratwurzel ($\frac{1}{2}$u + $\frac{1}{2}$w) oder $\frac{1}{2}$(u + w) eine ganze Zahl = z ist, weil u + w, nach der Voraussetzung, daß u und w entweder beide gerade oder beide ungerade sind, eine gerade Zahl wird, die also durch 2 theilbar ist.

Erste Anmerkung.

Diese Art der Auflösung findet man im Euklid zunächst vor dem 30sten Satz, des zehnten Buchs der Elemente. Den Beweis habe ich aber auf die jetzt gewöhnliche Art geführt. Wenn man

den Beweis analytisch oder erfindungsweise giebt, so stimmt er mit demjenigen überein, den ich bei der ersten Auflösungsart, die dem Pythagoras zugeschrieben wird, angewendet habe. Die Auflösung des Euklids unterscheidet sich aber dadurch von der des Pythagoras, daß m nicht allemal = 1 gesetzt wird, welches in der des Pythagoras geschieht, wie ich in dem analytischen Beweis der ersten Auflösungsart gezeigt habe, sondern daß m auch öfters eine andere ganze Zahl seyn kann. Sie hat also mehr Allgemeinheit als die Pythagoräische Auflösung, und ist nur durch folgende Bedingungen beschränkt. Erstens muß u und w so angenommen werden, daß u — w durch 2 theilbar, d. h. eine gerade Zahl ist. Folglich müssen u und w entweder beide gerade, oder beide ungerade angenommen werden, so daß der Fall, die eine gerade und die andere ungerade, ausgeschlossen ist. Zweitens ist $x^2 = uw$, folglich $x = \sqrt{uw}$. Wenn nun x eine gegebene ganze Zahl = a ist, so ist $a = \sqrt{uw}$, also $a^2 = uw$, daher müssen u und w auch so gewählt werden, daß sie Factoren des Quadrats der gegebenen Zahl a sind, und zwar ungleiche Factoren, damit u — w nicht Null wird. Wenn also die Zahl a gegeben ist, so erhebt man sie auf das Quadrat, und zerlegt dieses in alle diejenigen ungleichen ganzen Zahlen, die Factoren desselben sind. Finden sich nun darunter ein Paar zusammengehörige gerade, oder ein Paar zusammengehörige ungerade Factoren, so kann man aus der gegebenen Zahl a das gesuchte berechnen.

Wenn nun a eine ungerade Zahl, also a^2 auch ungerade ist, so geht dieses allemal an, denn die beiden Factoren u und w sind dann wenigstens die ungeraden Factoren a^2 und 1, also löset die Verfahrungsart nach Euklid alle Fälle der Pythagoräischen gleichfalls auf. Z. B. Es sei die gegebene Zahl a = 7, so ist $a^2 = 49 = x^2$, ferner ist u = 49 und w = 1, also u — w = 48 und $\frac{1}{2}$ (u — w) = 24

$= y$. Daher $y^2 = 24 . 24 = 576$, dazu addirt $49 = x^2$, so ist die Summe $625 = z^2$, und $\sqrt{625} = 25$. Also sind die drei ganzen Zahlen 7, 24 und 25, die nemlichen, welche vermittelst der ersten Art der Auflösung gefunden wurden. Ist aber die gegebene Zahl a eine gerade Zahl, so kann man wiederum allemal die gesuchten ganzen Zahlen y und z bestimmen. Denn wenn a eine gerade Zahl ist, so ist $\frac{a}{2}$ eine ganze Zahl, diese sei $= \delta$, so ist $\frac{a}{2} = \delta$, folglich $a = 2\delta$, und $a^2 = 4\delta^2$. Wird aber $4\delta^2$ mit 2 getheilt, so ist der Quotient $= 2\delta^2$, das heißt eine gerade Zahl, es mag δ gerade oder ungerade seyn. Folglich sind, wenn die gegebene Zahl a gerade ist, wenigstens zwei gerade ungleiche Factoren in dem Quadrat von a, nemlich 2 und $\frac{a^2}{2}$, (der einzige Fall ausgenommen, wenn a selbst $= 2$ ist,) so daß $u = \frac{a^2}{2}$ und $w = 2$ ist, und u so wie w gerade Zahlen sind. Also löset die Verfahrungsart nach Euklid auch die Fälle auf, welche die Vorschrift, die man dem Plato zuschreibt, auflöset. Z. B. Es sei $a = 8$, so ist $a^2 = 64 = x^2$, $\frac{a^2}{2} = \frac{64}{2} = 32 = u$ und $w = 2$, also $u - w = 30$ und $\frac{1}{2}(u - w) = 15 = y$. Daher ist $y^2 = 15 . 15 = 225$, dazu addirt $x^2 = 64$, so ist die Summe $289 = z^2$ und $\sqrt{289} = 17 = z$. Also sind die drei ganzen Zahlen 8, 15 und 17 die nemlichen, welche in der zweiten Auflösungsart angegeben worden sind.

Auch ist die Auflösungsart des Euklids sogar vollständiger, als die des Pythagoras und Plato. Z. B. Es sei die ungerade Zahl $a = 15$, so ist $a^2 = 225 = x^2$ von dieser Zahl sind die ungeraden Factoren paarweise 1 und 225, 3 und 75, 5 und 45, und 9 nebst 25. Es sei nun zuerst $u = 225$, also $w = 1$, so ist $u - w = 224$ und $\frac{1}{2}(u - w) = 112 = y$. Daher ist $y^2 = 12544$, dazu addirt $x^2 = 225$,

so ist die Summe $12769 = z^2$, und $\sqrt{12769} = 113 = z$. Folglich sind für $a = 15$ die ersten beiden gefundenen Zahlen $112 = y$ und $113 = z$, die nemlichen, welche in der ersten Auflösungsart, nemlich in der des Pythagoras, für $x = 15$ angegeben wurden.

Es sei ferner $u = 75$, also $w = 3$, so ist $u - w = 72$, und $\frac{1}{2}(u - w) = 36 = y$. Daher ist $y^2 = 1296$, dazu addirt $x^2 = a^2 = 225$, so ist die Summe $1521 = z^2$, und $\sqrt{1521} = 39 = z$. Folglich sind für $a = 15$ das zweite Paar der gefundenen Zahlen $36 = y$ und $39 = z$, welche die Pythagoräische Verfahrungsart nicht bestimmen kann.

Ferner sei $u = 45$, also $w = 5$, so ist $u - w = 40$, und $\frac{1}{2}(u - w) = 20 = y$. Daher ist $y^2 = 400$, dazu addirt $x^2 = a^2 = 225$, so ist die Summe $625 = z^2$, und $\sqrt{625} = 25 = z$. Folglich sind für $a = 15$ das dritte Paar der gefundenen Zahlen $20 = y$ und $25 = z$. Diese können nun vermittelst der Pythagoräischen Verfahrungsart gleichfalls nicht bestimmt werden.

Endlich sei $u = 25$, also $w = 9$, so ist $u - w = 16$, und $\frac{1}{2}(u - w) = 8 = y$. Daher ist $y^2 = 64$, dazu addirt $x^2 = a^2 = 225$, so ist die Summe $289 = z^2$, und $\sqrt{289} = 17 = z$. Folglich sind für $a = 15$, das vierte Paar der gefundenen Zahlen $8 = y$ und $17 = z$. Diese lassen sich nach der Pythagoräischen Verfahrungsart gleichfalls nicht bestimmen. Also ist die Auflösung des Euklid's von weitern Umfang als die des Pythagoras.

Sie ist aber auch von weitern Umfang, als die des Plato. Es sei nemlich die gegebene gerade Zahl $a = 12 = x$, so findet man, nach Plato's Verfahrungsart, den Werth von $y = (\frac{1}{2}x)^2 - 1 = (6)^2 - 1 = 35$, und $z = (\frac{1}{2}x)^2 + 1 = 37$. Ausser diesen beiden Werthen von y und z, kann man, für $a = 12$, nach Plato's Auflösungsart, sonst keine finden.

Nach Euklid's Verfahrungsart, ist nun, wenn die gegebene gerade Zahl $a = 12$ ist, $a^2 = 144 = x^2$, von dieser

Zahl sind die ungleichen geraden Factoren paarweise: 72 und 2, 36 und 4, 24 und 6, 18 und 8.

Es sei also zuerst $u = 72$, also $w = 2$, so ist $u - w = 70$, und $\frac{1}{2}(u - w) = 35 = y$. Daher ist $y^2 = 1225$, dazu addirt $x^2 = 144$, so ist die Summe $= 1369 = z^2$, und $\sqrt{1369} = 37 = z$. Diese Resultate stimmen mit den eben vermittelst der Platonischen Auflösungsart gefundenen, vollkommen überein.

Ferner sei $u = 36$, also $w = 4$, so ist $u - w = 32$, und $\frac{1}{2}(u - w) = 16 = y$. Daher ist $y^2 = 256$, dazu addirt $x^2 = 144$, so ist die Summe $= 400 = z^2$, und $\sqrt{400} = 20 = z$.

Ferner sei $u = 24$, also $w = 6$, so ist $u - w = 18$, und $\frac{1}{2}(u - w) = 9 = y$. Daher ist $y^2 = 81$, dazu addirt $x^2 = 144$, so ist die Summe $= 225 = z^2$, und $\sqrt{225} = 15 = z$.

Endlich sei $u = 18$, so ist $w = 8$, $u - w = 10$, und $\frac{1}{2}(u - w) = 5 = y$. Daher ist $y^2 = 25$, dazu addirt $x^2 = 144$, so ist die Summe $169 = z^2$, und $\sqrt{169} = 13 = z$.

Also sind für a oder $x = 12$ die vier Resultate:

$y = 35$	$y = 16$	$y = 9$	$y = 5$
$z = 37$	$z = 20$	$z = 15$	$z = 13$

von welchen nur das erste, vermittelst der Verfahrungsart des Plato, gefunden werden kann.

Wenn man für die gegebene gerade Zahl $a = 12$, nachdem in der Anmerkung der vorigen Art der Auflösung angegebenen Verfahren, die zugehörigen Werthe von y und z sucht, so findet man sie so. Die geraden Factoren von 12 sind 2, 4 und 6.

Es sei also $m = 2$, so ist $n = 6$, $y = n^2 - 1 = 35$ und $z = y + m = 37$,

Ferner sei $m = 4$, so ist $n = 3$, $y = 2(n^2 - 1) = 16$ und $z = y + m = 20$,

Ferner sei $m = 6$, so ist $n = 2$, $y = 3 (n^2 - 1) = 9$ und $z = y + m = 15$.

Man findet also für $a = 12$ nur drei Werthe in ganzen Zahlen von y und z, wenn n eine ganze Zahl ist. Die Auflösungsart des Euklid's giebt einen Werth mehr von y und z, nemlich $y = 5$ und $z = 13$. Diesen findet man auch, wenn man n dem unächten Bruch $\frac{r}{t}$ gleich setzt, und dessen Werth in Zahlen bestimmt, indem man, nach der gegebenen Anleitung, den geraden Factor 12 nimmt, und seine Hälfte in 2 und 3 zerlegt, so ist $\frac{r}{t} = \frac{3}{2}$, und $\frac{at}{r}$ oder $m = \frac{12.2}{3} = 8$, also ist $y = 4 (n^2 - 1) = 4 \left(\frac{9}{4} - \frac{4}{4}\right) = 4 . \frac{5}{4} = 5$, und $z = y + m = 5 + 8 = 13$.

Die Verfahrungsart des Euklid's will ich nun noch an einem Beispiel erläutern.

Es sei die gegebene gerade Zahl $a = 24$, folglich $a^2 = 576$. Von dieser Quadratzahl sind die ungleichen geraden Factoren paarweise:

288 und 2
144 und 4
96 und 6
72 und 8
48 und 12
36 und 16
32 und 18

Es sei nun $u = 288$, also $w = 2$, so ist $u - w = 286$ und $\frac{1}{2} (u - w) = 143 = y$. Daher ist $y^2 = 20449$, dazu addirt $x^2 = a^2 = 576$, so ist die Summe $21025 = z^2$ und $\sqrt{21025} = 145 = z$, oder auch $= \frac{1}{2} (u + w)$.

Ferner sei $u = 144$, also $w = 4$, so ist $u - w = 140$, $u + w = 148$, $\frac{1}{2} (u - w) = 70 = y$, und $\frac{1}{2} (u + w) = 74 = z$.

Ferner sei $u = 96$, also $w = 6$, so ist $u - w = 90$, $u + w = 102$, $\frac{1}{2}(u - w) = 45 = y$ und $\frac{1}{2}(u + w) = 51 = z$.

Ferner sei $u = 72$, also $w = 8$, so ist $u - w = 64$, $u + w = 80$, $\frac{1}{2}(u - w) = 32 = y$ und $\frac{1}{2}(u + w) = 40 = z$.

Ferner sei $u = 48$, also $w = 12$, so ist $u - w = 36$, $u + w = 60$, $\frac{1}{2}(u - w) = 18 = y$ und $\frac{1}{2}(u + w) = 30 = z$.

Ferner sei $u = 36$, also $w = 16$, so ist $u - w = 20$, $u + w = 52$, $\frac{1}{2}(u - w) = 10 = y$ und $\frac{1}{2}(u + w) = 26 = z$.

Endlich sei $u = 32$, also $w = 18$, so ist $u - w = 14$, $u + w = 50$, $\frac{1}{2}(u - w) = 7 = y$ und $\frac{1}{2}(u + w) = 25 = z$.

Also sind, nach der Auflösungsart Euklid's für a oder $x = 24$, die 7 Resultate:

$y = 143$, $y = 70$, $y = 45$, $y = 32$, $y = 18$, $y = 10$, $y = 7$.
$z = 145$, $z = 74$, $z = 51$, $z = 40$, $z = 30$, $z = 26$, $z = 25$.

Vermittelst der Formel $\frac{1}{2}m(n^2 - 1) = y$ sind in der vorigen Auflösungsart nur fünf Werthe von y und z, für die gegebene Zahl 24 gefunden worden, die Werthe $y = 10$, $z = 26$, und $y = 7$, $z = 25$ würden nur dann gefunden werden, wenn n dem unächten Bruch $\frac{r}{t}$ gleichgesetzt, dieser den erforderlichen vorhin angegebenen Bedingungen gemäs, berechnet und in die Formel $\frac{1}{2}m(n^2 - 1)$ statt n gesetzt würde, um y zu bestimmen, woraus sich sodann auch $z = y + m$ ergeben würde.

Nach der verbundenen pythagoräisch-platonischen Verfahrungsart lassen sich von diesen sieben Resultaten nur drei, nemlich das erste, sechste und siebente finden, und zwar das sechste und siebente nur dann, wenn man $y = 10$ und $y = 7$ als die gegebene Zahl a annimmt.

Zweite Anmerkung.

Diese Auflösung Euklid's kann man auch auf folgende sehr leichte Art analytisch finden. Es sei die gegebene ganze Zahl = a, und es soll seyn $a^2 + y^2 = z^2$, so ist $a^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$, also $\frac{a^2}{z - y} = z + y$. Das heißt: wenn $z - y$ eine ganze Zahl und ein Theiler von a^2 ist, so ist $z + y$ auch eine ganze Zahl.

Es sei nun $z + y = u$

$z - y = w$

so ist $z = \frac{u + w}{2}$ (wenn man die beiden Gleichungen addirt,)

und $y = \frac{u - w}{2}$ (wenn man die beiden Gleichungen subtrahirt,)

Damit aber y und z ganze Zahlen werden, so müssen u und w entweder beide gerade oder beide ungerade seyn, damit ihre Summe und ihr Rest durch 2 theilbar ist.

Auch folgendes Verfahren führt zu den nemlichen Resultaten.

Es soll seyn $a^2 + y^2 = z^2$. Nun sei $z = y + t$, folglich $z^2 = y^2 + 2ty + t^2$, so ist $a^2 = 2ty + t^2 = (2y + t)t$ also $\frac{a^2}{t} = 2y + t$. Wenn also t als ganze Zahl, die ein Theiler von a^2 ist, angenommen wird, so ist $2y + t$ auch eine ganze Zahl = s, also ist $y = \frac{s - t}{2}$. Damit also y eine ganze Zahl wird, so müssen t und s entweder beide gerade oder beide ungerade seyn. Endlich ist $y + t = z$.

Es giebt noch mehrere Arten, drei ganze Zahlen x, y und z zu finden, so daß $x^2 + y^2 = z^2$ ist, die aber in dem Fall, wenn x eine gegebene ganze Zahl ist, entweder gar nicht brauchbar sind, oder nur sehr wenige Resultate für y und z geben.

Anhang.

Vollständige Tabelle in ganzen Zahlen.

1) für a oder x = 24, so daß immer $x^2 + y^2 = z^2$.

x = 24	24	24	24	24	24	24
y = 7	10	18	32	45	70	143
z = 25	26	30	40	51	74	145
n = $\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	3	4	6	12
m = 18	16	12	8	6	4	2

2) für a oder x = 35

x = 35	35	35	35
y = 612	120	84	12
z = 613	125	91	37
n = 35	7	5	$\frac{7}{5}$
m = 1	5	7	25

3) für a oder x = 72.

x = 72	72	72	72	72	72	72	72	72	72	72	72
y = 21	30	54	65	96	135	154	210	320	429	646	1295
z = 75	78	90	97	120	153	170	222	328	435	650	1297
n = $\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{9}{4}$	3	4	$\frac{9}{2}$	6	9	12	18	36
m = 54	48	36	32	24	18	16	12	8	6	4	2

Vollständige Tabelle

für x oder a = 3 bis 23.

x	y(1)	y(2)	y(3)	y(4)	z(1)	z(2)	z(3)	z(4)
3	4				5			
4	3				5			
5	12				13			
6	8				10			
7	24				25			
8	6,	15			10,	17		
9	12,	40			15,	41		
10	24				26			
11	60				61			
12	5,	9,	16,	35	13,	15,	20,	37
13	84				85			
14	48				50			
15	8,	20,	36,	112	17,	25,	39,	113
16	12,	30,	63		20,	34,	65	
17	144				145			
18	24,	80			30,	82		
19	180				181			
20	15,	21,	48,	99	25,	29,	52,	101
21	20,	28,	72,	220	29,	35,	75,	221
22	120				122			
23	264				265			

Bemerkungen und Druckfehler.

Seite 26, Z. 9 ist nach dem Wort ferner einzuschalten: in Huberti rudiment. Algebrae, Wirceburg 1762.

Ebendaselbst, Z. 6 von unten ist zu bemerken, daß diese Construction in v. Türk's Leitfaden des Unterrichts in der Formenlehre, Berlin, 1817, Seite 177 so geändert ist: Das gegebene rechtwinkliche Dreieck ist HDM, (5. Figur) und FG (in der 4. F.) ist auf HD (5. F.) so gelegt, daß F in H folglich G in D fällt, und das Quadrat GKBC unterhalb DM liegt. Diese Construction entsteht auch, wenn man in der 12ten Figur der Hoffmann'schen Schrift die beiden Rechtecke AKOS und HCVQ wegläßt, und aus C mit BA eine Parallele zieht, bis sie AT schneidet.

Seite 37, nach der 19ten Zeile ist folgendes zu bemerken: Diese Beweisart kann auch so geändert werden, daß man (10. F.) das Quadrat BCIH der Hypotenuse frei beschreibt, und sodann zeigt, daß der Winkelpunkt I in FG und der Winkelpunkt H in die verlängerte DE trift. Diese Construction ist eine bloße Variation der Euklidischen, (15. F.) und sollte bei dem fünften Beweis in der Hoffmannischen Schrift (Seite 16.) gebraucht worden seyn.

Seite 57, Z. 2, von unten lies CH statt VT.

Seite 58, Z. 1, lies Fig. 22. statt Fig. 23.

Seite 62, Z. 10 von unten. Es ist noch zu bemerken, daß, wenn in der 18ten Figur das Quadrat BCDE zurück-

gelegt wird, oder L und M mit einer geraden Linie verbunden werden, der Beweis nach dem 21sten der Hoffmann'schen Schrift geführt werden kann.

Seite 64, Z. 6 von unten. Noch ist zu bemerken, daß man einen eigenen, von den Parallelen unabhängig geführten Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes in Schweikart's Theorie der Parallellinien, Jena, 1808. erster Abschnitt Seite 74 findet, der zwar zum Theil die Euklidische Construction (15. F.) voraussetzt, aber noch mehrere Hülfslinien erfordert, und seiner Weitläufigkeit und der ihn begründenden Vordersätze wegen, daselbst nachzulesen ist.

Seite 70, Z. 3 lies AC' statt AC.

Seite 79, Z. 9 lies AB' statt AD'.

Einige Verlagsartikel
der
J. L. S. Lechnerischen Buchhandlung
in Nürnberg.

Anzeiger, neuer oder fortgesetzter allgem. litterarischer. Mit Beylagen, Registern, 2 Kupfern und einigen Holzschnitten. 6 Bde. 4. 1802—1805. 9 fl. od. 5 Thlr.
— Auf Schreibpapier. 14 fl. 24 kr. oder 8 Thlr.

Dithmari, Episcopi Merseburgensis, Chronicon. Ad fidem Codicis qui in Tabulario Regio Dresdae servatur, denuo recensuit, I. F. Vrsini, I. F. A. Kinderlingii et A. C. Wedekindi passim et suas adjecit notas Io. Augustin Wagner. Cum specimine scripturae Codicis Dresd. 4. maj. 1807. 6 fl. oder 3 Thlr. 8 ggr.
— Idem liber, charta script. 8 fl. 6 kr. od. 4 Thlr. 12 ggr.

Fikenscher, G. Wolfg. Aug. gelehrtes Fürstenthm Baireut, oder biographische und litterarische Nachrichten von allen Schriftstellern, welche in dem Fürstenthum Baireut geboren sind, und in oder ausser demselben gelebet haben und noch leben, in alphabetischer Ordnung. 12 Bände. gr. 8 1801 — 1805 18 fl. oder 10 Thlr.

Dessen, vollständige akademische Gelehrten Geschichte der königlich - preussischen Friedrich - Alexanders - Universität zu Erlangen, von ihrer Stiftung bis auf gegenwärtige Zeit. 3 Abtheil. gr. 8. 1806. 7 fl. 12 kr. od. 4 Thlr.

Fischer, Gotthelf, Beschreibung einiger typographischen Seltenheiten und merkwürdigen Handschriften, nebst Beyträgen zur Erfindungsgeschichte der Buchdruckerkunst. 6 Lieferungen, mit Kupf. gr. 8. 1800 — 4. auf Druckpapier 6 fl. 24 kr. oder 3 Thlr. 14 ggr.
— Auf Schreibpapier 9 fl. oder 5 Thlr.

Panzer, D. Ge. Wolfg. Verzeichniss von Nürnbergischen Portraiten aus allen Ständen, 4. 1790. Auf Schreibpapier 3 fl. 36 kr. oder 2 Thlr.

Dessen, erste Fortsetzung des Verzeichnisses von Nürnbergischen Portraiten aus allen Ständen. 4. 1801. Auf Schreibpapier 54 kr. oder 12 ggr.

Dessen, Annalen der ältern deutschen Litteratur, zweiter Band, oder Anzeige und Beschreibung derjenigen Bücher, welche vom Jahre 1521. bis 1526. in deutscher Sprache gedruckt worden sind. gr. 4. 1805. 4 fl. 48 kr. od. 2 Thlr. 16 ggr.
— Auf Schreibpapier 6 fl. oder 3 Thlr. 8 ggr.

Reuter, I. G. Palmzweige auf Siegeln und Münzen des Mittelalters, was sie bedeuten? Mit 4 Kupfertafeln und 2 Vignetten. gr. 8. 1802. 54 kr. oder 12 ggr.

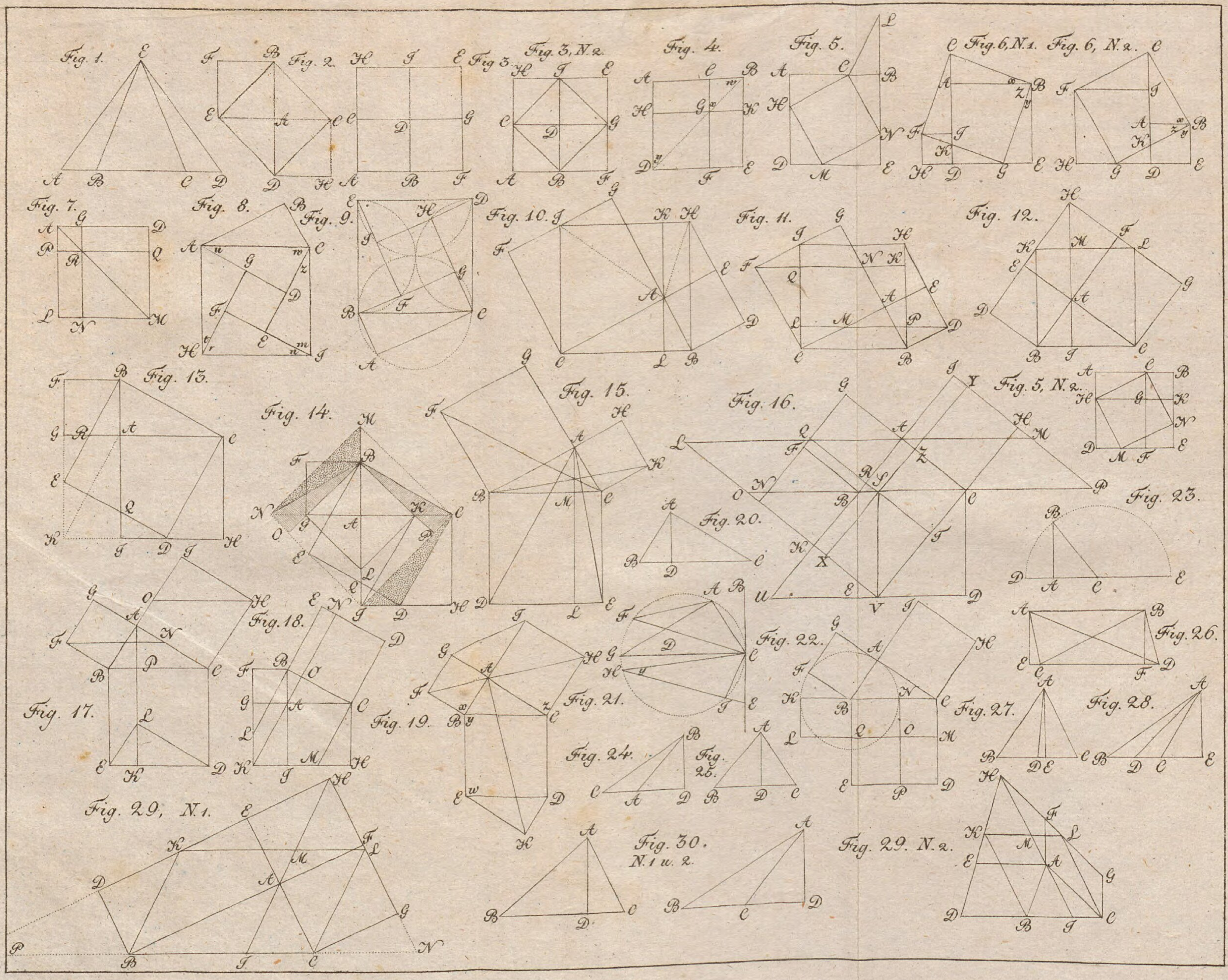
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 3, N. 2.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6, N. 1.
Fig. 6, N. 2.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 5, N. 2.
Fig. 20.
Fig. 23.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 29, N. 1.
Fig. 30, N. 1 u. 2.
Fig. 29. N. 2.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MIDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Müller, Johann W.

Systematische Zusammenstellung der wichtigen bisher bekannten Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes

Nürnberg 1819

Math.p. 369 b
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082451-0